2. Schwellenwertfunktionen

Typisches Verhalten: $\mathcal{E}$ Eigenschaft, dann

$$\lim_{n\to\infty} P(G_{n,p} \text{ hat } \mathcal{E}) \in \{0,1\}$$

<u>Satz 2.1</u> $\lim_{n\to\infty} P(K_4 \subseteq G_{n,p}) = \begin{cases} 0, & p = o(n^{-2/3}) \\ 1, & p = \omega(n^{-2/3}) \end{cases}$

<u>Beweis.</u> Sei $X = \#K_4's$ im $G_{n,p}$. Dann:

$$X = \sum_{S \in \binom{[n]}{4}} X_S \quad , \quad X_S = \mathbb{1}[G_{n,p}[S] \text{ ist } K_4]$$

Es gilt: 1) $\mathbb{E}[X_S] = p^6$

2) $\left|\binom{[n]}{4}\right| = \binom{n}{4}$

und daraus mit Linearität des $\mathbb{E}$: $\mathbb{E}[X] = \binom{n}{4} p^6 = \Theta(n^4 p^6)$

Falls $p = o(n^{-2/3})$:

$$\mathbb{E}[X] \leq n^4 \cdot o(n^{-2/3 \cdot 6}) = n^4 \cdot o(n^{-4}) = o(1).$$

Mit Erste Moment Methode: $X = 0$ mhw; dies zeigt die erste Aussage.

Falls $p = \omega(n^{-2/3})$ erhalten wir:

$$\mathbb{E}[X] \geq \binom{n}{4} \cdot \omega(n^{-2/3 \cdot 6}) = \omega(1) \quad , \text{also } \mathbb{E}[X] \to \infty.$$

Ferner gilt:

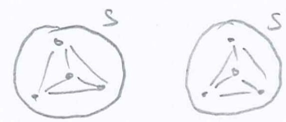
$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$
$$= \mathbb{E}\Big[\big(\sum_S X_S\big)^2\Big] - \mathbb{E}\Big[\sum_S X_S\Big]^2$$
$$= \sum_{S,S'} \left(\mathbb{E}[X_S X_{S'}] - \mathbb{E}[X_S] \cdot \mathbb{E}[X_{S'}]\right)$$

! gilt allg. für $X = \sum X_S$

Außerdem:

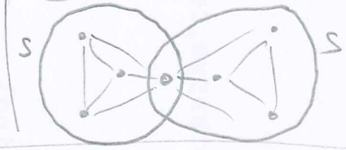
$$\mathbb{E}[X_S \cdot X_{S'}] = \begin{cases} p^{12}, & |S \cap S'| \leq 1 \\ p^{11}, & |S \cap S'| = 2 \\ p^9, & |S \cap S'| = 3 \\ p^6, & |S \cap S'| = 4 \end{cases}$$

① $\underline{S \cap S' = \emptyset}$



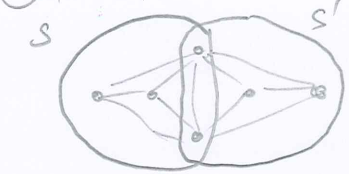
$\to p^{12}$

② $|S \cap S'| = 1$



$\to p^{12}$

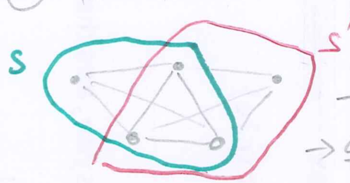
③ $|S \cap S'| = 2$



$\to p^{11}$

$\to \leq n^6$ Mögl.

④ $|S \cap S'| = 3$



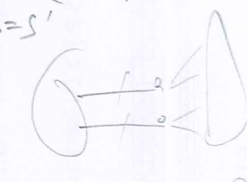
$\to p^9$

$\to \leq n^5$ Mögl.

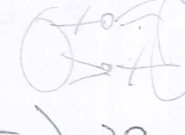
Insgesamt erhalten wir:

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{|S \cap S'|=2} (p^{11} - p^{12}) + \sum_{|S \cap S'|=3} (p^9 - p^{12}) + \sum_{S=S'} (p^6 - p^{12})$$

$$\leq n^6 p^{11} + n^5 p^9 + \mathbb{E}[X]$$



<u>Daraus:</u> $\dfrac{\mathrm{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]^2} = \dfrac{1}{\mathbb{E}[X]} + \dfrac{n^6 p^{11} + n^5 p^9}{\Theta(n^4 p^6)^2}$



$$= o(1) + \Theta(1) \cdot \left(\frac{1}{n^2 p} + \frac{1}{n^3 p^3}\right) \to 0. \quad \blacksquare$$

Sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft von Graphen. Wir nennen $f: \mathbb{N} \to [0,1]$ eine Schwellenwert fkt für $\mathcal{E}$ falls

$$\lim_{n\to\infty} P(G_{n,p} \in \mathcal{E}) = \begin{cases} 0, & p = o(f(n)) \\ 1, & p = \omega(f(n)) \end{cases}$$

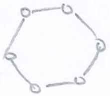
(oder 0/1 vertauscht).

Frage: H beliebig, was ist Schwellenwert für "$H \subseteq G_{n,p}$"?

Sei dazu $X_H = \#$Vorkommen von H in $G_{n,p}$ und $v = v(H)$, $e = e(H)$. Schreibe

$$X_H = \sum_{S \in \binom{[n]}{v}} X_{H,S}, \quad X_{H,S} = \mathbb{1}[G_{n,p}[S] \text{ enthält } H].$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_H] = \sum_{S \in \binom{[n]}{v}} \mathbb{E}[X_{H,S}].$$

H: 

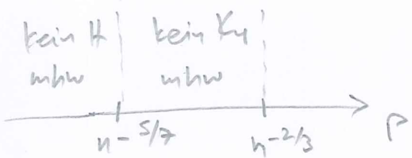
G[S]: 

Es gilt: $\mathbb{E}[X_{H,S}] \begin{cases} \geq p^e \\ \leq v! \, p^e \end{cases} = \Theta(1) \cdot p^e \quad (n \to \infty)$

Daraus: $\mathbb{E}[X_H] \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & p = o(n^{-v/e}) \\ \infty, & p = \omega(n^{-v/e}) \end{cases}$

Ist $n^{-v/e}$ eine Schwellenwert fkt.

Bsp. $H =$  $v = 5$, $e = 7$



Für $p = o(n^{-2/3})$ hat $G_{n,p}$ keinen K_4 mhw, also auch keinen H!

$\to$ Heuristik falsch.

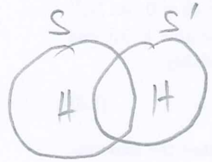
Def 2.2 Die Dichte von G ist $\rho(G) := e(G)/v(G)$. G heißt balanciert, falls $\rho(G') \leq \rho(G) \;\; \forall G' \subseteq G$.

Satz 2.3 H balanciert, $v(H) = v$, $e(H) = e$. Dann ist der Schwellenwert für "$H \subseteq G_{n,p}$" $n^{-v/e}$.

Bew. $p = o(n^{-v/e}) \Rightarrow X = 0$ mhw, da $\mathbb{E}[X_H] \to 0$

Sonst betrachte

$$\mathrm{Var}[X_H] = \sum_{S,S'} \left(\mathbb{E}[X_{H,S} \cdot X_{H,S'}] - \mathbb{E}[X_{H,S}] \cdot \mathbb{E}[X_{H,S'}] \right).$$



Falls $|S \cap S'| \leq 1$, dann

$$\mathbb{E}[X_{H,S} X_{H,S'}] = \mathbb{E}[X_{H,S}] \cdot \mathbb{E}[X_{H,S'}],$$

da keine Kante in $S \cap S'$ enthalten.

$0 \leq |S \cap S'| = i \leq v$

Falls $2 \leq i \leq v$ sei

$\zeta_{S,S'} = \min.$ Anzahl von Kanten in Graph F mit $V(F) = S \cup S'$ und $H \subseteq F[S]$, $H \subseteq F[S']$.

Da H balanciert: $\zeta_{S,S'} \geq 2e(H) - |S \cap S'| \, e/v$.

Außerdem: $|\{(S,S') : |S \cap S'| = i\}| \leq n^{2v-i}$.

$$\Rightarrow \mathrm{Var}[X_H] \leq \sum_{i=2}^{v} \sum_{|S \cap S'| = i} \mathbb{E}[X_{H,S} X_{H,S'}]$$

$$\leq \sum_{i=2}^{v-1} n^{2v-i} p^{2e - i \cdot e/v} + \mathbb{E}[X_H]$$

$$= (n^v p^e)^2 \underbrace{\sum_{i \geq 2} \left(\frac{1}{n p^{e/v}} \right)^i}_{= o(1)} + \mathbb{E}[X_H]$$

$$= o(\mathbb{E}[X_H]^2).$$