$ex(n, H) := \max\{ e(G) : v(G) = n,\ H \not\subseteq G \}$

$\to$ max. Anzahl Kanten in einem Graph mit n Knoten, der H-frei ist.

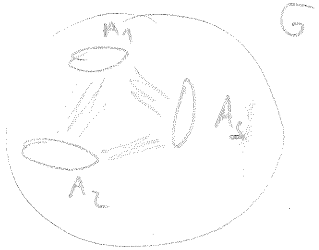
<u>Satz 5.3</u> (ESS) Sei H Graph, $\varepsilon > 0$. Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} \pm \varepsilon\right)\frac{n^2}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

<u>Lem 5.4</u> Seien $r, t \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 1/r$. Dann ex $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass alle Graphen G mit $n \geq n_0$ Knoten und $\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}$ Kanten $r+1$ disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_{r+1}$ enthalten, so dass:

1) $|A_i| = t$, $1 \leq i \leq r+1$

2) alle A_i-A_j Kanten sind im Graph, $1 \leq i < j \leq r+1$.



<u>Beweis (ESS)</u>. <u>Untere Schranke</u> Sei $r = \chi(H) - 1$, und betrachte den vollständigen r-partiten Graphen, in dem jeder Teil $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ oder $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ Knoten hat.

<u>Obere Schranke</u> Mit Lem 5.4: G enthält $K_{\chi(H) \cdot t}$, damit $H \subset G$. ∎

<u>Bew (Lem 5.4)</u> Letzte VL: es gibt $G' \subseteq G$ mit $\forall x \in V(G')$: $d_{G'}(x) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) v(G')$. Außerdem:

$$e(G) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{n^2}{2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{(n')^2}{2} + \frac{n - n'}{2}$$

Da $e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}$ folgt daraus:

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{(n')^2}{2} - \frac{n'}{2} \geq \frac{\varepsilon n^2}{4} - \frac{n}{2}$$

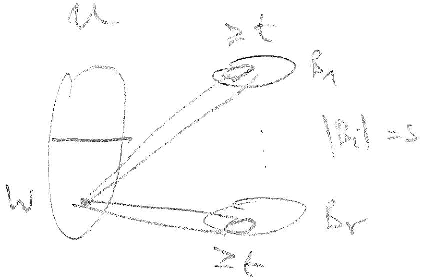
und damit $n' = \Theta(n \cdot \sqrt{\varepsilon r})$; n' wächst linear in n.

Wir zeigen die Aussage mit Induktion über r für beliebiges t. $r = 0$ ✓. Für $r > 0$ sei $s = \lceil \frac{3t}{\varepsilon} \rceil$.

Mit IA: es gibt disjunkte $B_1, \dots, B_r$, $|B_i| = s$, so dass B_i-B_j vollständig, $1 \leq i < j \leq r$. Seien

$U = V(G') \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_r)$

$W = \{ u \in U : |N_{G'}(u) \cap B_i| \geq t \ \forall\ 1 \leq i \leq r \}$



Sei $\tilde{m}$ die Anzahl der <u>nicht</u>-Kanten zw. U und $B_1 \dots B_r$. Dann:

$$\tilde{m} \geq |U \setminus W| \cdot (s - t)$$
$$\geq (n' - \underbrace{rs}_{|B_1 \cup \dots B_r|} - |W|) \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) s$$

Andererseits, jedes $x \in V(G')$ hat $\leq \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right) v(G')$ fehlende Kanten, also

$$\tilde{m} \le |B_1 \cup .. \cup B_r| \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right) n' = \left(1 - \frac{r\varepsilon}{2}\right) s n'.$$

Aus den zwei Schranken:

$$|W| \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) s \ge (n' - rs)\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) s - \left(1 - \frac{r\varepsilon}{2}\right) s n'$$

$$= \varepsilon \cdot \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{3}\right) s n' - \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) r s^2$$

Da ε, r, s fest kann $|W|$ beliebig groß gemacht werden, z.B.

$$|W| > \binom{s}{t}^r (t-1). \qquad (!!)$$

Jeder Knoten in W hat $(\ge)$ t Nachbarn in jedem B_i.
Es gibt $\binom{s}{t}^r$ Möglichkeiten, aus jedem B_i eine t-elem. Menge zu wählen. Mit Schubfachprinzip: es gibt $A_i \subseteq B_i$, $|A_i| = t$, $1 \le i \le r$ und $A_{r+1} \subseteq W$, $|A_{r+1}| = t$, so dass A_{r+1} zu allen Knoten in $A_1 \cup .. \cup A_r$ verbunden ist. ✓ ∎

3. Zufallsgraphen

1. Definitionen

Motivation: - gibt es Graphen mit bestimmten Eigenschaften?
- wie sehen "die meisten" Graphen aus?

Probabilistic Method (Erdös) Definiere W-Raum, und zeige, dass die W-keit für Eigenschaft >0 ist.

Erster Ansatz: Gleichverteilung auf der Menge aller Graphen mit n Knoten.

W-Raum (Ω_n, P_n) $\quad$ (σ-Algebra 2^{Ω_n})

$$\Omega_n = \left\{ ([n], E) : E \subseteq \binom{[n]}{2} \right\}$$

$$P_n[G] = 1/|\Omega_n| = 2^{-\binom{n}{2}} \rightarrow = 2^{-e(G)} \cdot 2^{-(\binom{n}{2} - e(G))}$$

Äquivalent dazu:
"Füge jede Kante unabhängig mit Wkeit $1/2$ ein"

Def 1.1 ($G_{n,p}$ - binomial random graph)
Sei $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$. Der W-Raum ist $(\Omega_n, P_{n,p})$ mit $P_{n,p}(G) = p^{e(G)} \cdot (1-p)^{\binom{n}{2} - e(G)}$

$\rightsquigarrow$ jede Kante unabh. mit W-keit p einfügen.

Wir schreiben $G_{n,p}$ für einen Graph mit Verteilung $P_{n,p}$ und lassen das n,p in $P_{n,p}$ weg, z.B.

$$P(G_{n,p} \text{ ist zshg}) = \ldots$$

Def 1.2 ($G_{n,m}$ – uniform random graph)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Der W-Raum ist

$$\Omega_{n,m} = \{ ([n], E) : E \subseteq \binom{[n]}{2}, |E| = m \}$$

$$P_{n,m} = 1 / |\Omega_{n,m}| = 1 / \binom{\binom{n}{2}}{m}.$$

In $G_{n,p}$ hat p eine intuitive Bedeutung. Für $e \in \binom{[n]}{2}$ sei

$$X_e = \mathbb{1}[e \in E(G_{n,p})]$$

Damit ist $e(G_{n,p}) = \sum_{e \in \binom{[n]}{2}} X_e$ Binomialverteilt.

Daraus: $\mathbb{E}[e(G_{n,p})] = \binom{n}{2} p$ und

$$\frac{e(G_{n,p})}{\binom{n}{2} p} \xrightarrow{P} 1$$

D.h. die # Kanten im $G_{n,p}$ ist $\approx \binom{n}{2} p$.

Zentrale Fragen: wie sehen $G_{n,p} / G_{n,m}$ asymptotisch (für $n \to \infty$) aus? Gegeben Eigenschaft $\mathcal{E}$, bestimme

$$\lim_{n \to \infty} P(G_{n,p} \text{ hat } \mathcal{E})$$

Bem. p kann Funktion von n sein.

Probabilistische Hilfsmittel I

Lemma (Markov) $X \in \mathcal{L}^1$, $X \geq 0$. Dann für $t > 0$

$$P(X \geq t) \leq \mathbb{E}[X] / t.$$

Beob. Falls $X \in \mathbb{N}_0$, dann $P(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X]$.

Falls der W-Raum von einem Parameter n abhängt (wie $G_{n,p}$) und $\mathbb{E}[X] \xrightarrow{n \to \infty} 0$, dann

$$P(X = 0) \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

Wir sagen: $X = 0$ whw (mit hoher Wkeit).

Dies ist die erste moment Methode.

[Zeige $\mathbb{E}[X] \to 0$, folgere $X = 0$ whw].

Umgekehrt, falls $\mathbb{E}[X] \to \infty$, dann nicht immer $P(X \geq 1) \to 1$.

Lemma (Chebyshev), $X \in \mathcal{L}^2$, $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$. Dann

$$P(X = 0) \leq \mathrm{Var}[X] / \mathbb{E}[X^2].$$

Zweite Moment Methode

Zeige $\frac{\mathrm{Var}[X]}{\mathbb{E}[X^2]} \to 0$, dann $X \geq 1$ whw.