5. Extremale Graphentheorie

Wie viele Kanten kann ein dreiecksfreier Graph maximal haben?

Beobachtung

1) Sei T Baum auf n Knoten. Dann enthält T keine Kreise und $e(T) = n-1$

2) Sei $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ vollständiger bipartiter Graph auf n Knoten. Dann enthält $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ keine ungeraden Kreise und $e(K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}) = (\frac{n}{2})^2 = \frac{n^2}{4}$

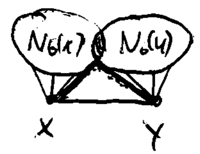
Ist $\frac{n^2}{4}$ bestmöglich? – Ja:

Satz 5.1 (Mantel)

Ein dreiecksfreier Graph G hat maximal $\frac{v(G)^2}{4}$ Kanten.

Beweis

Sei $xy \in E(G)$. Dann gilt $d_G(x) + d_G(y) \leq v(G)$ da $N_G(x) \cap N_G(y) = \emptyset$ (sonst enthielte G ein Dreieck).



Es folgt

$$(*) \quad \sum_{x\in V} d_G(x)^2 = \sum_{x\in V} \sum_{y\in N_G(x)} d_G(x) = 2\cdot \sum_{xy\in E} d_G(x) = \sum_{xy\in E} (d_G(x)+d_G(y)) \leq e(G)\cdot v(G)$$

Ferner erhalten wir mit Cauchy-Schwarz und $e(G) = \frac{1}{2}\sum_{x\in V} d_G(x)$

$$(**) \quad \sum_{x\in V(G)} d_G(x)^2 \geq \frac{(\sum_{x\in V} d_G(x))^2}{v(G)} = \frac{4\cdot e(G)^2}{v(G)}$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgern wir

$$\frac{4\cdot e(G)^2}{v(G)} \leq e(G)\, v(G) \Leftrightarrow e(G) \leq \frac{v(G)^2}{4}$$

$\square$

Noch allgemeiner wollen wir die maximale Kantenanzahl K_{r+1}-freier Graphen bestimmen $(r \geq 2)$.

Satz 5.2 (Turan)

Ein K_{r+1}-freier Graph G hat maximal $(1-\frac{1}{r})\frac{v(G)^2}{2}$ Kanten $(r \geq 2)$

Beweis

Nehme an, dass G die größtmögliche Anzahl an Kanten hat und K_{r+1}-frei ist.

Wir zeigen zuerst:

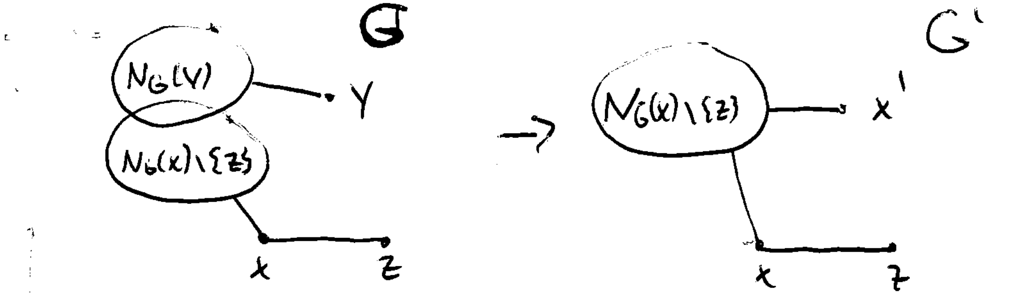
$$(*) \quad \forall x,y,z \in V(G):\ xy \notin E(G) \wedge yz \notin E(G) \Rightarrow xz \notin E(G)$$

Widerspruchsannahme: Sei $x,y,z \in V(G)$, s.d. $xy, yz \notin E(G)$, $xz \in E(G)$

1.Fall: $d_G(y) < d_G(x)$. (und analog $d_G(y) < d_G(z)$)

~~Sei G' der Graph Lösch~~ Wir konstruieren einen Graphen G' folgendermaßen: Lösche y und füge stattdessen eine Kopie x' von x (inklusive der Kanten zu der Nachbarschaft von x) ein. Die restlichen Knoten/Kanten in G bleiben gleich.

Dann ist G' K_{r+1}-frei, da x und x' nicht in der gleichen Clique auftreten können und G K_{r+1}-frei ist.



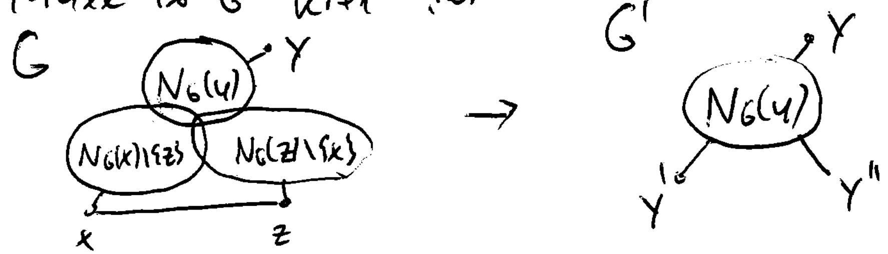
Es folgt:

$$e(G') = e(G) \underbrace{- d_G(y) + d_G(x)}_{>0} > e(G) \quad ⚡$$

Das ist ein Widerspruch zu der max. Kantenzahl von G.

2. Fall: $d_G(y) \geq d_G(x)$ und $d_G(y) \geq d_G(z)$

Konstruiere G' folgendermaßen: Lösche x und z und füge stattdessen Kopien y' und y'' von y ein. Die restlichen Knoten/Kanten von G bleiben wieder unverändert. Mit der gleichen Begründung wie im 1. Fall ist G' K_{r+1}-frei



Es folgt

$$e(G') = e(G) - (d_G(x) + d_G(z) - 1) + 2d(y)$$
$$= e(G) + \underbrace{(d_G(y) - d_G(x)) + (d_G(y) - d_G(z))}_{\geq 0} + 1$$
$$> e(G). \quad ⚡$$

Damit haben wir (*) bewiesen.

Aus (*) folgern wir weiter, dass G ein vollständiger, multipartiter Graph sein muss, da G nicht enthält.

Sei also $G = (V_1 \cup \dots \cup V_k, E)$ s.d. der Graph zwischen V_i und V_j vollständig ist, $1 \leq i < j \leq k$. Es gilt $k \leq r$, da sonst K_{r+1} enthalten wäre.

Als nächstes zeigen wir, dass die Kantenzahl von G maximiert wird, wenn $|V_1|, \dots, |V_k|$ sich um höchstens 1 unterscheiden.

Nehme also an, dass o.B.d.A. $|V_1| > |V_2| + 1$. Wenn wir nun einen Knoten aus V_1 löschen und einen neuen in V_2 hinzufügen, der mit allen Knoten in V_j, $j \neq 2$, per Kanten verbunden wird, dann gewinnen wir $|V_1| - |V_2| - 1 \geq 1$ Kanten $\Rightarrow |V_i| \in \{\lfloor \frac{v(G)}{r} \rfloor, \lfloor \frac{v(G)}{r} \rfloor + 1\} \; \forall 1 \leq i \leq k$

Sei $v(G) = k \cdot N + R$ mit $0 \leq R < k$ und $N = \lfloor \frac{v(G)}{r} \rfloor$

Dann

$$e(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} |V_i||V_j| = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq k} |V_i||V_j| + \sum_{i=1}^{k} |V_i|^2}_{(\sum |V_i|)^2 = v(G)^2} - \sum_{i=1}^{k} |V_i|^2\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\left(v(G)^2 + (k-R)N^2 + R(N+1)^2\right)$$

Setze $N = \frac{1}{k}(v(G) - R)$ ein und erhalte

$$e(G) = \frac{1}{2}\Big(v(G)^2 - \frac{v(G)^2}{k} + \underbrace{\frac{R^2}{k} - R}_{\leq 0}\Big) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{v(G)^2}{2}$$

Da $k \leq r$ gilt ferner

$$e(G) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{v(G)^2}{2}$$

□

Für Graph H: Definiere $ex(n,H) := \max\{e(G) : |G| = n,\ H \not\subseteq G\}$

Bisher: $ex(n, \triangle) = \frac{n^2}{4}$ und $ex(n, K_{r+1}) \le (1-\frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$

Folgendes Theorem bestimmt $ex(n,H)$ für beliebige Graphen H sehr genau.

Theorem 5.3 (Erdős-Stone-Simonovits)

Sei H ein Graph und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\forall n \ge n_0: \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \varepsilon\right)\frac{n^2}{2} \le ex(n,H) \le \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}$$

Bemerkungen

- $\chi(\cdot)$ chromatische Zahl (Kleinstmögliche Färbung)
- ~~Total: $H = K_{r+1}$~~ Falls H bipartit: $\forall \varepsilon > 0: ex(n,H) \le \varepsilon n^2$ (n groß genug)

Um Theorem 5.3 zu beweisen brauchen wir ein Hilfslemma

Lemma 5.4

Sei $r, t \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \frac{1}{r}$ beliebig. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. alle Graphen mit $n \ge n_0$ Knoten und mehr als $(1-\frac{1}{r}+\varepsilon)\frac{n^2}{2}$ Kanten $r+1$ disjunkte Knotenmengen $A_1, \dots, A_{r+1}$ von Größe t enthalten, so dass der Graph zwischen A_i und A_j vollständig ist für alle $1 \le i < j \le r+1$.

Beweis: Sei G Graph mit $v(G) = n$ und $e(G) \ge (1-\frac{1}{r}+\varepsilon)\frac{n^2}{2}$.

Konstruiere Teilgraph $G' \subseteq G$ ~~folgendermaßen~~ s.d. $\forall x \in V(G'): d_{G'}(x) \ge (1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2})|V(G')|$ folgendermaßen:

Setze $G_0 = G$. Im i-ten Schritt:

i) Nehme Knoten ~~mit~~ $x \in V(G_{i-1})$ mit $d_{G_{i-1}}(x) < (1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2})|V(G_{i-1})|$ und setze $G_i = G_{i-1}[V(G_{i-1}) \setminus \{x\}]$

Falls so ein Knoten nicht existiert, setze $G' = G_{i-1}$ und terminiere.

Sei $n' = |V(G')|$. Klar, entweder hat G' die gewünschte Eigenschaft oder $n' = 0$.

Wir zeigen nun, dass n' groß genug ist.

Um im i-ten Schritt G_i zu erreichen, entfernen wir höchstens $(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2})|V(G_{i-1})|$ Kanten. Insgesamt ist die ~~ges~~ Anzahl gelöschter Kanten also höchstens

$$\sum_{\ell=n'+1}^{n} \left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\ell = \left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{(n-n')(n+n'+1)}{2}$$

$$\le \left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{n^2-(n')^2}{2} + \frac{n-n'}{2}.$$

Da $e(G') \le \frac{(n')^2}{2}$ gilt somit

$$(*)\ e(G) \le \underbrace{\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{n^2-(n')^2}{2} + \frac{n-n'}{2}}_{\text{Kanten, die höchstens entfernt wurden}} + \underbrace{\frac{(n')^2}{2}}_{\text{Kanten, die höchstens übrig bleiben}}$$

$$= \left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{n^2}{2} + \left(\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{(n')^2}{2} + \frac{n-n'}{2}.$$

Nach Annahme gilt $e(G) \geq (1-\frac{1}{r}+\varepsilon)\frac{n^2}{2}$. Damit muss mit (*) gelten, dass

$$(1-\tfrac{1}{r}+\varepsilon)\frac{n^2}{2} \leq (1-\tfrac{1}{r}+\tfrac{\varepsilon}{2})\frac{n^2}{2} + (\tfrac{1}{r}-\tfrac{\varepsilon}{2})\frac{(n')^2}{2} + \frac{n-n'}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\tfrac{1}{r}-\tfrac{\varepsilon}{2})\frac{(n')^2}{2} - \frac{n'}{2} \geq \varepsilon\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$$

und somit wird n' beliebig groß in n.

Nun zeigen wir per Induktion, dass es $r+1$ Mengen $A_1, \dots, A_{r+1} \in V(G')$ von Größe t gibt, sodass der Graph zwischen A_i und A_j vollständig ist für alle $1 \leq i < j \leq r+1$.

$\underline{r=0}$: stimmt trivialerweise

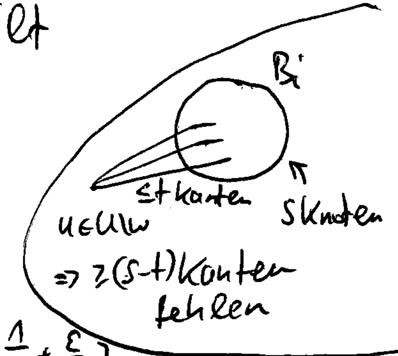
$\underline{r>0}$: Sei $s = \lceil 3t/\varepsilon \rceil$. Mit IA erhalten wir $B_1, \dots, B_r \subset V(G')$ s.d. der Graph zw. B_i und B_j vollständig ist und $|B_i| = s$, $1 \leq i < j \leq r$.

Def $U := V(G') \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_r)$

und $W = \{u \in U : |N_{B_i}(u)| \geq t, 1 \leq i \leq r\}$

Wir wollen nun die Anzahl fehlender Kanten $\tilde{m}$ zwischen U und $B_1 \cup \dots \cup B_r$ schätzen, (um $|W|$ abschätzen zu können)

Da jeder Knoten in $U \setminus W$ weniger als t Nachbarn in einem B_i hat, gilt



$$(**)\quad \tilde{m} \geq |U \setminus W|(s-t)$$

$$\geq (n' - r\cdot s - |W|)(1-\tfrac{\varepsilon}{3})\cdot s$$

Jeder Knoten in G' hat Grad $\geq (1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2})n'$

$\Rightarrow$ höchstens $(\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{2})n'$ fehlen, da es insgesamt nur n' potentielle Nachbarn gibt.

Also

$$\tilde{m} \leq \sum_{1\leq i\leq r} |B_i|(\tfrac{1}{r}-\tfrac{\varepsilon}{2})n' = r\cdot s(\tfrac{1}{r}-\tfrac{\varepsilon}{2})n'$$

$$= (1-\tfrac{r\varepsilon}{2})n'$$

Kombiniert mit (**) ergibt das

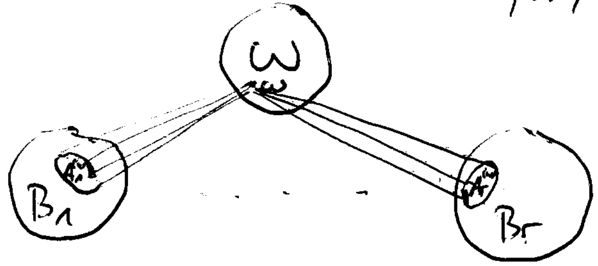
$$(n' - rs - |W|)(1-\tfrac{\varepsilon}{3})s \leq (1-\tfrac{r\varepsilon}{2})sn'$$

$$\Leftrightarrow |W|(1-\tfrac{\varepsilon}{3})s \geq \varepsilon\cdot(\tfrac{r}{2}-\tfrac{1}{3})sn' - (1-\tfrac{\varepsilon}{3})rs^2$$

Da ε, r, s feste Konstanten sind, können wir $|W|$ beliebig groß machen, indem wir n' groß machen. Gelte also

$$|W| > \binom{s}{t}^r (t-1)$$

Für $\omega \in \Omega$ sei $A_i^{(\omega)} \subseteq N_{B_i}(\omega)$ t-elementig (das ist möglich da $N_{B_i}(\omega) \geq t$) für $1 \leq i \leq r$ und schreibe $A_\omega = (A_1^{(\omega)}, \dots, A_r^{(\omega)})$



Es gibt $\binom{s}{t}^r$ Möglichkeiten $A_1 \subseteq B_1, \dots, A_r \subseteq B_r$ mit $|A_i| = t$, $1 \leq i \leq r$, zu wählen.

Da es mehr als $\binom{s}{t}^r (t-1)$ Möglichkeiten in $(A_\omega)_{\omega \in \Omega}$ gibt, müssen mindestens t Knoten in Ω existieren, die die gleichen Mengen $A_1, \dots, A_r$ induzieren. Wähle genau t solcher Knoten und fasse sie in der Menge A_{r+1} zusammen. Dann ist der Graph zwischen A_{r+1} und A_i vollständig, $1 \leq i \leq r$. Da $A_i \subseteq B_i$ ist auch der Graph zwischen A_i und A_j vollständig für $1 \leq i < j \leq r$. $\square$

<u>Beweis von Theorem 5.3</u>

- <u>$ex(n, H) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}$</u>

Sei $\chi(H) = r+1$ und betrachte den vollst. multipart. Graphen $G = (V_1 \cup \dots \cup V_r, E)$ mit $|V_i| \in \{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor, \lfloor \frac{n}{r} \rfloor + 1\}$, $1 \leq i \leq r$, aus dem Beweis von Satz 5.2.

Dann $e(G) \geq \binom{r}{2} \lfloor \frac{n}{r} \rfloor^2 \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}$ für n groß genug.

Weiter gilt $H \not\subseteq G$, da $\chi(G) = r < \chi(H)$

$\Rightarrow ex(n, H) \geq \left(1 - \frac{1}{r} - \varepsilon\right)\frac{n^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}$ ✓

- <u>$ex(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}$</u>

H kann in einen vollständigen multipartiten Graphen $G' = (V_1 \cup \dots \cup V_{\chi(H)}, E)$ eingebettet werden, wobei $|V_i| = t$ für t groß genug, $1 \leq i \leq \chi(H)$.
Nehme hierzu Färbung von H mit $\chi(H)$ Farben und lasse $c^{-1}(i) \subseteq V_i$, $1 \leq i \leq \chi(H)$.
Da $H \subseteq G'$ gilt $ex(n, H) \leq ex(n, G')$.
Mit Lemma 5.4 enthalten <u>alle</u> Graphen mit $n \geq n_0$ Knoten und $m \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}$ Kanten G' für $r = \chi(H) - 1$. Das impliziert

$$ex(n, H) \leq ex(n, G') \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \varepsilon\right)\frac{n^2}{2}$$

$\square$