4.3 Kantenfärbung

Eine Kantenfärbung von $G=(V,E)$ ist eine Abbildung $c: E \to [k]$ mit

$$|e \cap e'| = 1 \Rightarrow c(e) \neq c(e') \quad \forall e,e' \in E.$$

Chromatischer Index

$$\chi'(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : \exists \text{ Kantenfärbung mit } k \text{ Farben}\}$$

4.14 Satz Sei $G=(A \cup B, E)$ bipartit. Dann: $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Def $G=(V,E)$ Graph. $M \subseteq E$ heißt Matching, falls für alle $e,e' \in M$ gilt: $e \neq e' \Rightarrow e \cap e' = \emptyset$.

Wir identifizieren M mit $(\bigcup_{e \in M} e, M)$

Sei $m(G) := \max\{|M| : M \text{ Matching von } G\}$

Ein Matching mit $m(G) = |M|$ heißt maximum Matching. Ein Matching mit $|M| = \frac{v(G)}{2}$ heißt perfekt.

Satz 4.16 (Hall) Sei $G=(A \cup B, E)$ bipartit. Dann

$$m(G) = |A| \Leftrightarrow \forall X \subseteq A \ |N_G(X)| \geq |X|.$$

Beweis

„$\Rightarrow$" Falls M Matching mit $|M| = |A|$ existiert, so gilt

$\forall X \subset A: |N_G(X)| = |\bigcup_{x \in X} N_G(x)| \geq |X|$

„$\Leftarrow$" Dafür benötigen wir Hilfsmittel.

Seien $a_0, a_1, \ldots \in A$, $b_0, b_1, \ldots \in B$ unterschiedliche Knoten und $P = a_0 b_0 a_1 b_1 a_2 \ldots$ ein Pfad in G. Sei M ein Matching in G.

P heißt M-alternierend, falls $b_i a_{i+1} \in E(M)$, $i \geq 0$. (Damit ist $a_i b_i \in E(M)$)

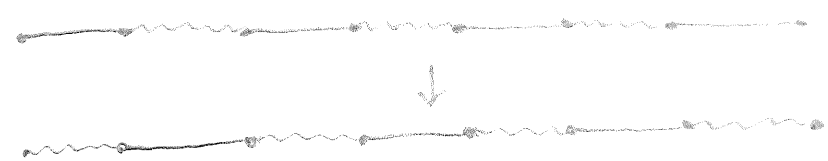
Ferner heißt P M-augmentierend, falls P in B endet und zusätzlich Start- und Endknoten nicht in $V(M)$ sind.

Lemma 4.17 Sei $G=(A \cup B, E)$ bipartit, M ein Matching, P M-augmentierend. Dann ist $M \triangle E(P) := (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$ ein Matching mit $|M \triangle E(P)| = |M| + 1$.

Beweis

1. $M \setminus E(P)$ ist ein Matching von $G[V \setminus V(P)]$ mit $|M| - (\frac{v(P)}{2} - 1)$ Kanten
2. $E(P) \setminus M$ ist Matching von $G[V(P)]$ mit $\frac{v(P)}{2}$ Kanten.

$\Rightarrow (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M) = M \triangle E(P)$ ist Matching von G mit $|M|+1$ Kanten. ∎



Beweis von Satz 4.16

Durch Widerspruch. Sei also M ein maximum Matching mit $|M| < |A|$ und $\forall X \subseteq A$ gelte $|N_G(X)| \geq |X|$.

[Seien p,q Aussagen, dann $\neg(p \to q) = p \wedge \neg q$]

Sei $a_0 \in A \setminus V(M)$ und sei P die Menge aller M-alternierenden Pfade, die in a_0 beginnen. Keiner dieser Pfade ist M-augmentierend (sonst Widerspruch mit Lemma 4.17). Sei $A' \subseteq A$ die Menge der Knoten in A, die in den Pfaden in P enthalten sind, $B' \subseteq B$ analog.

Beobachtung:

1) $\forall b \in B \; \exists a \in A'$ mit $ab \in M$, da es keine M-augmentierenden Pfade gibt.

2) $\forall a \in A' \setminus \{a_0\} \; \exists b \in B'$ mit $ab \in M$ (Der Vorgänger von a in einem M-alternierenden Pfad). Für a_0 gibt es kein solches b, da $a_0 \notin V(M)$.

$\Rightarrow |A'| - 1 = |A' \setminus \{a_0\}| = |B'|$.

Außerdem ist $B' \subseteq N_G(A')$. Falls $B' = N_G(A')$, dann ist $|A'| - 1 = |B'| = |N_G(A')|$ im Widerspruch zur Annahme. Es gibt also $v \in N_G(A') \setminus B'$ mit $wv \in E$ und $w \in A'$. Sei $P_w \in P$ ein M-alternierender Pfad, der in a_0 startet und in w endet. Dann ist $P_w \cup \{wv\}$ ein M-augmentierender Pfad. ($v \notin B' \Rightarrow v \notin V(M)$, sonst gäbe es einen M-alternierenden Pfad in P der v enthält) Mit Lemma 4.17 kann aber M kein maximum Matching sein. ◻

<u>Satz 4.18</u> Sei $G = (A \cup B, E)$ bipartit. Dann ist

$$m(G) = |A| - \underbrace{\max_{A' \subseteq A} \{|A'| - |N_G(A')|\}}_{=:\Delta}.$$

<u>Beweis</u> „$\leq$"

Es ist $\Delta \geq 0$, (setze $A' = \emptyset$). Sei $A' \subseteq A$ mit $\Delta = |A'| - |N_G(A')|$. Dann sind in jedem Matching $\geq \Delta$ Knoten aus A' nicht enthalten.

„$\geq$"

Betrachte $G' = (A \cup (B \cup D), E \cup E')$ mit $|D| = \Delta$, $A \cap D = \emptyset = D \cap B$ und $E' = \{ad \mid a \in A, d \in D\}$. Dann ist G' bipartit und für alle $X \subseteq A$ gilt:

$$|N_{G'}(X)| = |N_G(X)| + \Delta \geq (|X| - \Delta) + \Delta = |X|.$$

Also folgt mit Satz 4.16, dass G' ein Matching M hat, mit $|M| = |A|$. Durch das Entfernen von $\leq |D| = \Delta$ vielen Kanten aus M erhalten wir ein Matching von G mit $\geq |A| - \Delta$ Kanten.

$\Rightarrow m(G) \geq |A| - \Delta$. ◻

<u>Beobachtung</u>

Sei $d \in \mathbb{N}$ und $G = (A \cup B, E)$ bipartit und d-regulär.

1) $|A| = |B| = \frac{v(G)}{2}$

2) Sei $X \subseteq A$, dann ist

$$|N_G(X)| \geq \frac{e(X, B)}{d} = \frac{d \cdot |X|}{d} = |X|$$

und mit Satz 4.16 ist $m(G) = |A| = \frac{v(G)}{2}$.

G erlaubt ein perfektes Matching.

Beweis von Satz 4.14

$\chi'(G) \geq \Delta(G)$ klar.

„$\leq$": Angenommen G ist regulär. Sei M ein perfektes Matching von G. Färbe alle Kanten in M mit Farbe 1. Sei $G' := (A \cup B, E \setminus M)$, dann ist G' $(\Delta(G)-1)$-regulär und mit Induktion folgt $\chi'(G) \leq \Delta(G)$.

Ist G nicht regulär, so führe folgende Konstruktion durch:

(I) Klonen: Betrachte $G' = ((A \cup B') \cup (B \cup A'), E')$, wobei $G'[B' \cup A'] \cong G$. G' hat keine weiteren Kanten.

(II) Regularisieren: Falls $d_G(u) < \Delta(G)$, so verbinde u mit seiner Kopie. Für G' gilt:

$$\Delta(G') = \Delta(G), \quad \delta(G') = \delta(G) + 1$$

Widerhole Schritte (I) und (II) solange, bis G' regulär ist. Mit obigem Argument ist G' $\Delta(G') = \Delta(G)$ färbbar und somit ist auch G als Teilgraph von G' $\Delta(G)$-färbbar. $\blacksquare$

Satz 4.19 (Vizing). Sei G Graph, dann

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

5. Extremale Graphentheorie

Wieviele Kanten kann ein Graph ohne Dreieck maximal haben?

Beobachtung

1, Sei T ein Baum auf n Knoten. Dann hat T keine Kreise, also kein Dreieck und $v(T) = n-1$.

2, Sei $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ ein vollständiger bipartiter Graph auf n Knoten. Dann hat $K_{n/2, n/2}$ keine ungeraden Kreise also kein Dreieck und

$$v(K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

Satz 5.1 (Mantel)

Ein Graph ohne Dreieck hat maximal $\frac{n^2}{4}$ Kanten, wobei n die Anzahl der Knoten ist.

Beweis

Sei $G = (V, E)$ und seien $x, y \in V$, sodass $xy \in E$. Es ist $d(x) + d(y) \leq n$, da Knoten in $V \setminus \{x,y\}$ entweder mit x oder mit y benachbart sein können, jedoch nicht mit beiden, da sonst G ein Dreieck enthielte.

Es gilt

$$\sum_{x \in V} d(x)^2 = \sum_{xy \in E} (d(x) + d(y)) \leq e(G)\, v(G)$$

da in beiden Summen der Faktor $d(x)$

für alle $x \in V$ genau $d(x)$ mal gezählt wird.

Andererseits gilt mit Cauchy-Schwarz und $e(G) = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} d(x)$, dass

$$\sum_{x \in V} d(x)^2 \geq \frac{\left(\sum_{x \in V} d(x)\right)^2}{v(G)} \geq \frac{4\, e(G)^2}{v(G)}.$$

Zusammen erhalten wir

$$\frac{4\, e(G)^2}{v(G)} \leq e(G)\, v(G) \iff e(G) \leq \frac{v(G)}{4}. \qquad \blacksquare$$