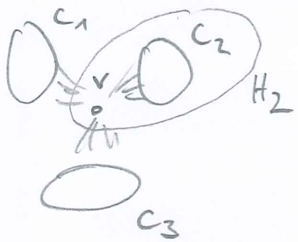
Satz 4.9 (Brooks) Sei G zshg, $G \neq K_n$, $C_{n:2+1}$. Dann:

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Bew. Für $\Delta \in \{0,1,2\}$ ist die Aussage klar. Für $\Delta \geq 3$ und G nicht regulär (also $\exists v \in V(G)$ mit $d_G(v) < \Delta(G)$) folgt die Aussage mit Lem 4.8.

1. Fall $\kappa(G)=1$. Sei $v \in V$, $C_1, \dots, C_\ell$ mit $\ell \geq 2$ die Komponenten von $G[V \setminus \{v\}]$. Sei



$$H_i = G[V(C_i) \cup \{v\}], \quad 1 \leq i \leq \ell$$

Dann ist für $1 \leq i \leq \ell$

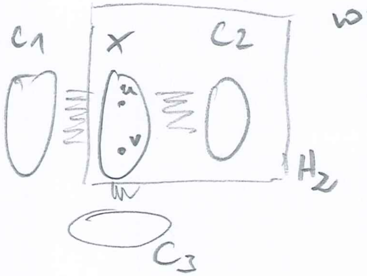
$$d_{H_i}(v) < \Delta, \text{ da } d_{H_j}(v) \geq 1 \ \forall\ 1 \leq j \leq \ell.$$

Mit Lem 4.8: es gibt Färbungen $c_i : V(H_i) \to [\Delta(G)]$ von H_i, $1 \leq i \leq \ell$. ObdA ist $c_i(v) = c_j(v)$ $\forall\ 1 \leq i,j \leq \ell$. Dann

$$c : V(G) \to \Delta(G) \qquad u \mapsto \begin{cases} c_1(v), & u = v \\ c_i(u), & u \in V(C_i) \setminus \{v\} \end{cases}$$

eine Δ-Färbung von G. ✓

2. Fall $\kappa(G) = 2$ und es gibt Trenner $X = \{u,v\} \subseteq V(G)$ mit $uv \notin E(G)$. Seien $C_1, \dots, C_\ell$, $\ell \geq 2$ die Komponenten



von $G[V \setminus X]$, $H_i = G[V(C_i) \cup X]$, $1 \leq i \leq \ell$.

Analog: $d_{H_i}(u), d_{H_i}(v) < \Delta$ und somit gibt es Färbungen

$$c_i : V(H_i) \to [\Delta(G)], \quad 1 \leq i \leq \ell,$$

von H_i.

Problem: umfärben wie in Fall 1 nicht möglich; es konnte $c_i(u) = c_i(v)$ aber $c_j(u) \neq c_j(v)$ für ein $i \neq j$.

Nehmen wir an, dass

$$\forall\ 1 \leq i \leq \ell \quad \exists\ x_i \in \{u,v\} \text{ mit } d_{H_i}(x_i) \leq \Delta(G) - 2 \qquad (*)$$

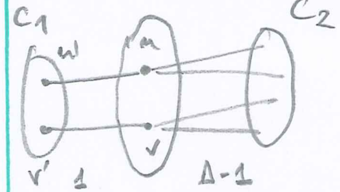
Dann gibt es ≥ 2 Mögl. $c_i(x_i)$ zu wählen, so dass c_i eine $\Delta(G)$-Färbung ist und $c_i(u) \neq c_i(v)$ $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$.

Dann oBdA $c_i(u) = c_j(u)$, $c_i(v) = c_j(v)$ $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$, und

$$c : V \to [\Delta(G)], \quad w \mapsto \begin{cases} c_1(u), & w = u \\ c_1(v), & w = v \\ c_i(w), & i \in V(C_i) \end{cases}$$

ist eine $\Delta(G)$-Färbung von G.

Falls $(*)$ nicht gilt: $\ell = 2$. ObdA $d_{H_2}(u), d_{H_2}(v) = \Delta - 1$.

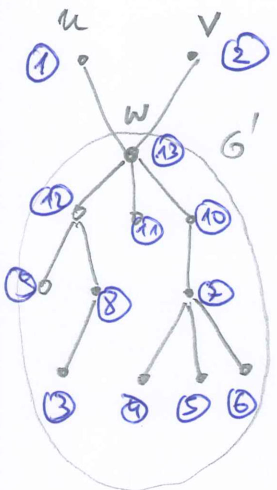


Seien u', v' die Nachbarn von u, v in C_1. Dann ist $X' = \{u, v'\}$ ein Trenner von G mit $(*)$, und $uv' \notin E$. ✓

3. Fall $(\kappa(G) \geq 3)$ oder $(\kappa(G) = 2$ und jeder min. Trenner enthält Kante$)$.

Sei $w \in V(G)$, $u, v \in N_G(w)$ mit $uv \notin E$. So ein Tripel (u,v,w) existiert, da sonst $G = K_{\Delta+1}$. Nach Annahme: $G' = G[V \setminus \{u,v\}]$ zshg. Sei T' ein Spannbaum von G'!

Konstruiere eine Permutation der Knoten:



$\pi(1) = u$, $\pi(2) = v$

$\pi(3), \pi(4), \ldots, \pi(v(G))$ seien die Knoten von T' in absteigender Reihenfolge nach ihrem Abstand zu w; insbesondere $\pi(v(G)) = w$.

Färbe mit Greedy. Dann gilt:

$$|N_G(\pi(i)) \cap \{\pi(1), \ldots, \pi(i-1)\}| \leq \Delta(G) - 1$$

für $1 \leq i \leq v(G)-1$, da für jedes solche i ein $j > i$ ex. mit $\pi(j) \in N_G(\pi(i))$. Damit: Greedy braucht $\leq \Delta(G)$ Farben um $V(G) \setminus \{w\}$ zu färben. Ferner, da $d_{G'}(w) \leq \Delta(G) - 2$ und u, v die gleiche Farbe bekommen gibt es $\leq \Delta(G) - 1$ Farben in $N_G(w)$. ✓ ∎

4.2. Die Schranke $\chi(G) \geq \omega(G)$.

$\chi(G) \geq \omega(G)$ → Anzahl Knoten im größten vollst. Teilgraph.

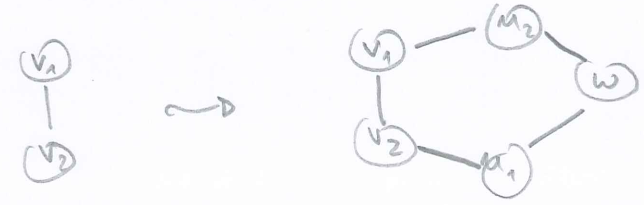
Satz 4.10 $k \in \mathbb{N}$. Es gibt G mit $\chi(G) = k$, $\omega(G) = 2$.

Mycielsky: Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Konstruiere G':

$V' = V \cup \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{w\}$, also $n+1$ neue Knoten

$E' = E \cup \{u_i v : 1 \leq i \leq n, v \in N_G(v_i)\} \cup \{w u_i : 1 \leq i \leq n\}$

Bsp. $G = K_2$



C_5.

Lem 4.11 Sei G Dreiecksfrei, also $\omega(G) = 2$. Dann $\omega(G') = 2$ und $\chi(G') = \chi(G) + 1$.

Übung!

Wir wissen: G Baum ⇒ $\chi(G) = 2$. Vermutung: falls G "lokal" wie ein Baum aussieht, dann $\chi(G)$ klein.

Sei

$$g(G) = \inf\{\ell \in \mathbb{N} : C_\ell \subseteq G\} \quad \text{- girth}$$

G Wald ⇒ $g(G) = \infty$. Je größe $g(G)$ ist, desto größere iterierte Nachbarschaften induzieren Bäume.

Satz 4.12 $k, g \in \mathbb{N}$. Es gibt G mit $\chi(G) \geq k$, $g(G) = g$.

Zufallsgraphen!

4.3. Kanten

Def 4.13 Eine Kantenfärbung von $G = (V, E)$ ist Abbildung $c : E \to [k]$ mit

$$|e \cap e'| = 1 \Rightarrow c(e) \neq c(e') \qquad \forall e, e' \in E$$

Der chromatische Index

$$\chi'(G) := \min\{k \in \mathbb{N} : \exists \text{ Kantenfärbung mit } k \text{ Farben}\}$$

Bsp. 1) $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, da alle Kanten, die einen Knoten enthalten, unterschiedlich gefärbt sind.

2) $\chi'(C_n) = \chi(C_n)$.

Satz 4.14 Sei $G = (A \cup B, E)$ bipartit. Dann $\chi(G) = \Delta(G)$.

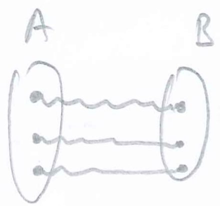
Dazu folgende Definition.

Def 4.15 $G = (V, E)$ Graph. $M \subseteq E$ heißt Matching, falls für alle $e, e' \in M$ gilt: $e \neq e' \Rightarrow e \cap e' = \emptyset$. Wir identifizieren M mit $(\bigcup_{e \in M} e, M)$.

Beob. c Kantenfärbung $\Rightarrow$ $c^{-1}(i)$ Matching $\forall\, 1 \leq i \leq k$.

Sei $m(G) := \max\{|M| : M \text{ Matching von } G\}$

Ein Matching M mit $m(G) = |M|$ heißt maximum Matching.



Beob. Falls bip. Graph ein Matching M mit $|A| = |M|$ hat, so ist:

$$|N_G(X)| \geq |X| \quad \forall\, X \subseteq A.$$

$$\left(= \bigcup_{x \in X} N_G(x) \right)$$

Satz 4.16 (Hall) Sei $G = (A \cup B, E)$ bipartit. Dann

$$m(G) = |A| \Leftrightarrow \forall X \subseteq A : |N_G(X)| \geq |X|.$$

$\Rightarrow$ aus Beob.