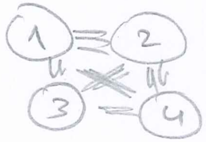
4. Graphfärbungen

4.1. Knoten

Def 4.1 Sei $k \in \mathbb{N}$, $G=(V,E)$ Graph. Eine k-Färbung ist eine Abbildung $c: V \to [k]$ mit

$$\forall uv \in E: \ c(u) \neq c(v),$$

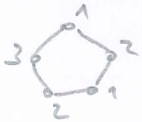


d.h. Knoten, die verbunden sind, werden unterschiedlich gefärbt.

Die chromatische Zahl von G ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : \exists \text{ k-Färbung von } G\}$$

Bsp. 1) $\chi(K_n) = n$, $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & n \text{ ungerade} \end{cases}$



2) $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ bipartit, $e(G) \geq 1$

3) $\chi(G) \leq v(G)$ – jeder Knoten unterschiedliche Farbe

Def 4.2 Sei $G=(V,E)$ Graph.

1) $V' \subseteq V$ heißt unabhängig, falls $E \cap \binom{V'}{2} = \emptyset$. Sei

$$\alpha(G) = \max\{|V'| : V' \text{ unabhängig in } G\}$$

die Unabhängigkeitszahl von G.

2) $V' \subseteq V$ heißt vollständig / Clique, falls $E \cap \binom{V'}{2} = \binom{V'}{2}$. Sei

$$\omega(G) = \max\{|V'| : V' \text{ vollständig in } G\}$$

die Cliquenzahl von G.

Bsp. 1) $\alpha(K_n) = 1$, $\omega(K_n) = n$, $\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\omega(C_n) = \begin{cases} 3, & n=3 \\ 2, & n \geq 4 \end{cases}$.

2) Sei c k-Färbung von G. Dann $c^{-1}(1), \dots, c^{-1}(k)$ unabhängig.

Lem 4.3 Sei $G=(V,E)$ Graph.

1) $H \subseteq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G)$

2) $\chi(G) \geq \omega(G)$

3) $\chi(G) \geq v(G)/\alpha(G)$.

Bew. (1) Sei c eine $\chi(G)$-Färbung von G. Dann ist $c|_{V(H)}$ eine Färbung von H mit $\leq \chi(G)$ Farben.

(2) Falls $\omega(G) = t$, dann $K_t \subseteq G$.

(3) Sei $\chi(G) = k$, c eine k-Färbung, $V_i = c^{-1}(i)$. Dann $|V_i| \leq \alpha(G)$, die V_i unabhängig. Außerdem

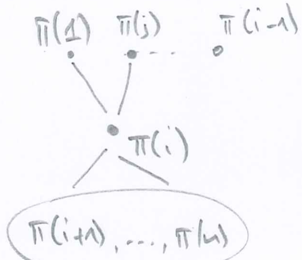
$$v(G) = \left|\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \leq k \cdot \alpha(G). \ \blacksquare$$

Greedy-Algorithmus Sei $G = ([n], E)$, $\pi: [n] \to [n]$ Permutation. Färbe die Knoten in Reihenfolge $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$. Dabei erhält $\pi(i)$ die kleinstmögliche Farbe:

1) $c(\pi(1)) = 1$

2) Für $i = 2, 3, \dots, n$:

$$c(\pi(i)) = \min\{\ell \in \mathbb{N} : \ell \neq c(v) \ \forall v \in N_G(\pi(i)) \cap \{\pi(1), \dots, \pi(i-1)\}\}$$



Sei $\chi_g(G, \pi) = \max\{\ell \in \mathbb{N} : \exists v \in V \text{ mit } c(v) = \ell\}$

die Greedy-chromatische Zahl von G bzgl. π.

Lem 4.4 Sei $G=(V,E)$ Graph, π Permutation von V. Dann

$$\chi(G) \le \chi_g(G,\pi) \le 1+\Delta(G) \qquad (\Delta = \text{max. Grad})$$

Beweis. Das erste "$\le$" folgt aus Def von $\chi(G)$. Für das zweite. Für alle $v\in V$ gilt $d_G(v) \le \Delta(G)$. Wenn v gefärbt wird, dann kommen in seiner Nachbarschaft $\le \Delta(G)$ gefärbte Knoten vor $\Rightarrow$ eine Farbe in $[1+\Delta(G)]$ kommt nicht vor.

Bem. $\chi(G) \le 1+\Delta(G)$ ist scharf für K_n, C_{2n+1}, kann aber beliebig schlecht sein: $\chi(K_{n,n})=2$, aber $\Delta(K_{n,n})=n$.

Def 4.5 $G=(V,E)$ heißt d-degeneriert, falls jeder Teilgraph einen Knoten mit Grad $\le d$ hat. Sei

$$dg(G) = \min\{d\in\mathbb{N}: G \text{ ist } d\text{-degeneriert}\}.$$

Bsp. Sei W ein Wald. Dann:

1) $\exists v\in V(W)$ mit $d(v)\le 1$.
2) Jedes $W' \subseteq W$ ist Wald

} jeder Teilgraph hat Knoten mit Grad ≤ 1

Somit $dg(W) \le 1$.

Lem 4.6 $G=([n],E)$ ist genau dann d-degeneriert, wenn es Permutation $\pi:[n]\to[n]$ gibt mit

$$\forall i\in[n]: \quad |N_G(\pi(i)) \cap \{\pi(1),\dots,\pi(i-1)\}| \le d$$

Beweis. "$\Leftarrow$" Sei $H\subseteq G$; wir zeigen, dass es einen Knoten v in $V(H)$ gibt mit $d_H(v)\le d$. Sei dazu

$$i_H = \max\{1\le i\le n: \pi(i)\in V(H)\}, \quad \tilde{H} = G[\{\pi(1),\dots,\pi(i_H)\}] \supseteq H.$$

Aus Annahme: $d_{\tilde{H}}(\pi(i_H)) \le d$, und $d_H(\pi(i_H)) \le d_{\tilde{H}}(\pi(i_H))$ ✓

"$\Rightarrow$" Induktion über n, $n=1$ ✓. Da $dg(G)\le d$ gibt es $v\in[n]$ mit $d_G(v)\le d$; ohne Beschränkung $v=n$. Dann ist $G'=G[[n-1]]$ d-degeneriert, und nach IA gibt es Permutation $\pi':[n-1]\to[n-1]$ mit

$$|N_{G'}(\pi'(i)) \cap \{\pi'(1),\dots,\pi'(i-1)\}| \le d \quad \forall\ 1\le i\le n-1.$$

Sei nun

$$\pi:[n]\to[n], \quad i \mapsto \begin{cases} \pi'(i), & 1\le i\le n-1 \\ n, & i=n \end{cases}$$

Wir erhalten für $1\le i\le n-1$:

$$|N_G(\pi(i)) \cap \{\pi(1),\dots,\pi(i-1)\}|$$

$$= |N_{G'}(\pi(i)) \cap \{\pi'(1),\dots,\pi'(i-1)\}| \le d$$

$N_G = N_{G'}$ oder $N_G = N_{G'} \cup \{n\}$

und $|N_G(n) \cap \{\pi(1),\dots,\pi(n-1)\}| = d_G(n) \le d$. ✓ ☐

Thm 4.7 $\chi(G) \le 1+dg(G)$.

Bew. Sei π Permutation der Knoten mit

$$|N_G(\pi(i)) \cap \{\pi(1),\dots,\pi(i-1)\}| \le d =: dg(G)$$

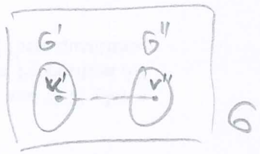
Wenn Greedy $\pi(i)$ färbt, sind $\le d$ Farben in der gefärbten Nachbarschaft vorhanden. ∎

Lem 4.8. Sei $G=(V,E)$ zusammenhängend mit $d_G(v) \le d$ für alle $v \in V$, und es gibt $u \in V$ mit $d_G(u) < d$. Dann

$$\chi(G) \le d.$$

Insbesondere $\chi(G) \le \Delta(G)$ in diesem Fall.

Beweis. Wir zeigen $dg(G) \le d-1$. G hat Knoten u vom Grad $\le d-1$. Sei $X \subseteq V$, $X \neq V$ und



$$G' = G[X], \quad G'' = G[V \setminus X].$$

Da G zshg gibt es G'-G'' Kante $v'v''$. Dann ist aber $d_{G'}(v') \le d-1$. Da X beliebig war, folgt die Aussage. ∎

Satz 4.9 (Brooks) Sei G zshg, $G \neq K_n, C_{2n+1}$. Dann:

$$\chi(G) \le \Delta(G).$$