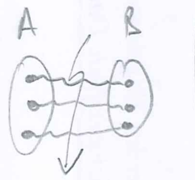
Lem 3.6 Sei $G=(V,E)$ (Multi-)Graph, $A,B \subseteq V$. Dann:

minimale Größe einer A von B trennenden Knotenmenge = maximale Anzahl disjunkter A-B Pfade



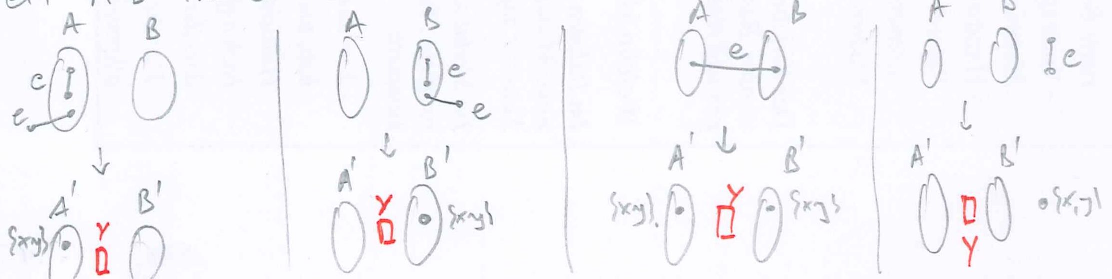
Beweis. Sei k die kleinste Größe eines A-B Trenners in G; offenbar enthält G nicht mehr als k disjunkte A-B Pfade. Zu zeigen: es gibt k solche Pfade.

Induktion über $e(G)$. Falls $e(G)=0$, dann $|A\cap B|=k$ und es gibt k triviale A-B Wege – die Knoten in $A\cap B$.

Falls $e(G)>0$, dann sei $e=xy\in E$. Wir zeigen die Aussage durch Widerspruch. Hat G keine k disjunkte A-B Wege, dann hat auch G/e keine solchen Wege. Nach IA: es gibt A'-B' Trenner Y von G/e, $|Y|<k$ und insbesondere: $\{xy\}\in Y$, da sonst Y auch G trennen würde. Sei somit

$$X := (Y\setminus\{xy\})\cup\{x,y\}$$

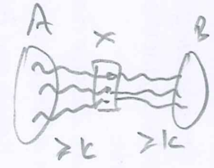
ein A-B Trenner von G mit k Knoten.



Betrachte nun $G'=(V,E\setminus\{e\})$. Da $x,y\in X$ trennt jeder A-X Trenner in G' auch A von B und enthält somit $\geq k$ Knoten. Nach IA:

G' enthält $\geq k$ disjunkte A-X Pfade, und genau so $\geq k$ disjunkte B-X Pfade.

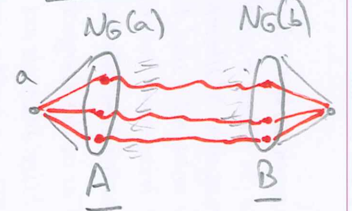
Da X A-B Trenner, treffen sich diese Pfade nur in X; zusammen bilden sie $(\geq)$ k A-B Pfade. ⊛



Kor 3.7 Sei $G=(V,E)$ Graph, $a,b\in V$, $a\neq b$. Falls $ab\notin E$, dann:

minimale Größe einer a-b trennenden Menge $X\subseteq V\setminus\{a,b\}$ = maximale Anzahl kreuzungsfreier a-b Pfade.

Beweis. Wende Lem 3.6. an auf

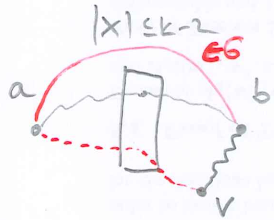


$G[V\setminus\{a,b\}]$

mit $A=N_G(a)$, $B=N_G(b)$ ⊛

Beweis. (Satz 3.5) Nur "⇒" zu zeigen. Seien a,b zwei Knoten, die mit $<k$ kreuzungsfreien Pfaden verbunden sind. Nach Kor 3.7: $ab\in E$. Sei $G'=(V,E\setminus\{ab\})$.

Dann enthält die größte Menge von kreuzungsfreien a-b Pfaden $\leq k-2$ Pfade in G'. Da $ab \notin G'$ folgt mit Kor. 3.7: es gibt $X \subseteq V$, $|X| \leq k-2$, X trennt a,b in G'.



Da $|V| > k$ gibt es $v \in V \setminus (X \cup \{a,b\})$

X trennt v von a oder von b, da sonst ein a-b Pfad in $G'[V \setminus X]$ existieren würde

OBdA X trennt v von a in G'.

$\Rightarrow$ alle a-v Pfade <u>in G</u> enthalten Knoten aus X oder b

$\Rightarrow$ $X \cup \{b\}$ trennt G

Aber $|X \cup \{b\}| \leq k-1$ ↯ ∎