wobei $M^{(i,j)}$ die Matrix ohne i-te Zeile, j-te Spalte.

<u>Beweis.</u> Induktion über $|E|$. $|E|=0$, dann

$$\tau(G) = 0 = \det(0)^{(1,1)}$$

Für $|E| \geq 1$ und $v(G)=2$:

$$|E| = \tau(G) = \det\begin{pmatrix} |E| & -|E| \\ -|E| & |E| \end{pmatrix}^{(1,1)} = \det(D-A)^{(1,1)}.$$

Für $v(G) \geq 3$ wenden wir Lem 2.17 an:

$$\tau(G) = \tau(G/e) + \tau(G\setminus e) \qquad (*)$$

Ohne Einschränkung: $e = \{1,2,m\}$ – durch Umbennenen der Knoten ändert sich $\tau(G)$ nicht. Dann:

$$D-A = \begin{pmatrix} d_G(1) & -a_{12} & -a_{13} & \cdots \\ -a_{21} & d_G(2) & -a_{23} & \cdots \\ -a_{31} & -a_{32} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{M}} \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

mit $M = (D-A)^{(1,1)(1,1)}$.

Mit Induktionsannahme:

$$\tau(G\setminus e) = \det\begin{pmatrix} d_G(1)-1 & -a_{12}+1 & -a_{13} & \cdots \\ -a_{21}+1 & d_G(2)-1 & -a_{23} & \cdots \\ -a_{31} & -a_{32} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{M}} \\ \vdots & & & \end{pmatrix}^{(1,1)}$$

$$=: \det(\overline{H})$$

(Laplace)

$$= (d_G(2)-1)\det(M) + H$$

wobei $H = \sum_{i=3}^{n} (-1)^{i+1} a_{2,i} \cdot \det(\overline{H}^{(1,i-1)})$.

Mit Induktionsannahme:

$$\tau(G/e) = \det\begin{pmatrix} d_G(1)+d_G(2)-a_{21}\cdot 2 & \cdots \\ \vdots & M \end{pmatrix}^{(1,1)}$$

$$= \det(M).$$

Insgesamt mit $(*)$:

$$\tau(G) = d_G(2)\cdot\det(M) + H$$

$$= \det\begin{pmatrix} d_G(2) & -a_{23} & \cdots \\ -a_{32} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{M}} \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \det(D-A)^{(1,1)}. \quad \checkmark$$

3. Zusammenhang

Wie kann man quantifizieren, wie "stark" ein Graph G zusammenhängt? Mögliche Interpretationen:

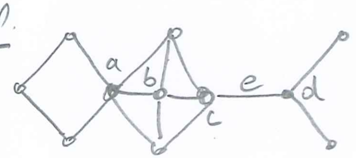
1) Egal welcher Knoten entfernt wird, G bleibt zshg.
2) Für $u,v\in V$, $u\neq v$ gibt es ≥ 2 u-v Pfade mit $P_1\neq P_2$ und $V(P_1)\cap V(P_2)=\{u,v\}$.

Wir werden sehen: äquivalent!!

3.1. k-zshg Graphen

<u>Def 3.1</u> Sei $G=(V,E)$ Graph, $A,B\subseteq V$, $X\subseteq V\cup E$. Wir sagen: X <u>trennt</u> A,B in G, falls jeder u-v Pfad mit $u\in A, v\in B$ ein Element aus X enthält. X heißt <u>Trenner</u>, falls $(V\setminus X, E\setminus X)$ nicht zshg.

<u>Bsp.</u>



$\{a\},\{c\},\{e\},\{d\}$ sind Trenner, $\{b\}$ nicht.
e heißt <u>Brücke</u>
a,c,d heißen <u>Artikulationsknoten</u>.

<u>Def 3.2</u> Sei $k\in\mathbb{N}$. $G=(V,E)$ heißt <u>k-zshg</u>, falls

- $|V|>k$
- Für alle $X\subseteq V$, $|X|<k$, ist $G[V\setminus X]$ zshg.

Der <u>Knotenzshg</u> von G ist

$$\kappa(G) := \max\{k\in\mathbb{N} : G \text{ k-zshg}\}$$

<u>Bsp.</u> 1) $\kappa(C_n)=2$, $\kappa(K_n)=n-1$

2) $\kappa(G)\leq\delta(G)$ – entferne alle Nachbarn

3) $\kappa(G)=k \Rightarrow \exists X\subseteq V, |X|=k$ mit $G[V\setminus X]$ nicht zshg (oder $G=K_{k+1}$).

4) 1-zshg $\Leftrightarrow$ zshg und $v(G)\geq 2$.

<u>Def 3.3</u> Sei $\ell\in\mathbb{N}$. G heißt <u>ℓ-kantenzshg</u>, falls

- $|V|\geq 2$
- Für alle $F\subseteq E$, $|F|<\ell$, ist $(V, E\setminus F)$ zshg.

Der <u>Kantenzshg.</u> von G ist

$$\lambda(G) = \max\{\ell\in\mathbb{N} : G \ \ell\text{-kantenzshg.}\}$$

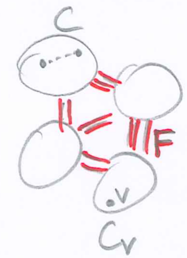
<u>Bsp.</u> 1) $\lambda(C_n)=2$, $\lambda(G)\leq\delta(G)$

2) Betrachte folgendes G:

$\kappa(G)=2$
$\lambda(G)=3$.

<u>Lem 3.4.</u> $\forall G$: $\kappa(G)\leq\lambda(G)$.

<u>Beweis.</u> Sei $F=\{e_1,\dots,e_{\lambda(G)}\}$ ein Trenner von G. Dann gilt für alle Komponenten C von $(V,E\setminus F)$: für alle $e\in F$ ist $e\notin\binom{V(C)}{2}$; sonst wäre F nicht minimal.



1. Angenommen, es gibt $v\in V$, $v\notin e_1,\dots,e_{\lambda(G)}$. Sei C_v die Komponente von v in $(V,E\setminus F)$. Aus der Beobachtung:

$$|e_i\cap V(C_v)|\leq 1 \quad \forall\, 1\leq i\leq\lambda(G), v\in V.$$

Dann ist die Menge

$$X = \{ e_i \cap V(C_v) : 1 \leq i \leq \lambda(G) \}$$

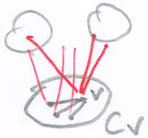
ein Trenner von G, $|X| \leq \lambda(G) \Rightarrow \kappa(G) \leq \lambda(G)$. ✓

2. Für alle $v \in V$ gibt es $1 \leq i_v \leq \lambda(G)$ mit $v \in e_{i_v}$.

Dann gilt für $v \in V$:

$$d_G(v) = |N_G(v) \cap V(C_v)| + |N_G(v) \setminus V(C_v)|$$

$$\leq |\{1 \leq i \leq \lambda : e_i \cap V(C_v) \neq \emptyset, v \notin e_i\}|$$



$$+ |\{1 \leq i \leq \lambda : e_i = vw, w \in V \setminus V(C_v)\}|$$

$$\leq \lambda.$$

Falls $N_G(v)$ Trenner ist für ein $v \in V$, dann $\kappa(G) \leq d_G(v) \leq \lambda$ ✓

Sonst: $V = \{v\} \cup N_G(v)\ \forall v \in V \Rightarrow G \cong K_{\lambda+1} \Rightarrow \kappa(G) \leq \lambda$. ✓ ☺

3.2. Satz von Menger

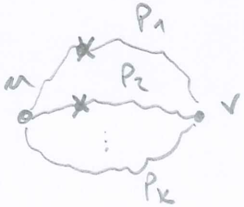
Satz 3.5. Sei $G = (V, E)$, $k, l \in \mathbb{N}$. Dann:

1) G k-zshg $\Leftrightarrow$ zwischen je zwei $u, v \in V$, $u \neq v$ gilt es k kreuzungsfreie Pfade.

(P_1, P_2 kreuzungsfrei, dann $V(P_1) \cap V(P_2) = \{u, v\}$).

2) G l-kanten-zshg $\Leftrightarrow$ zwischen je zwei $u, v \in V$, $u \neq v$ gilt es l kantendisjunkte Pfade.

"$\Leftarrow$" ist einfach zu sehen. Sei $X \subseteq V$, $|X| < k$. Dann gibt es ≥ 2 Knoten in $V \setminus X$, seien u, v zwei davon, und $P_1, \dots, P_k$ kreuzungsfreie u-v Pfade. Dann gibt es ein $1 \leq i \leq k$ mit $V(P_i) \cap X = \emptyset \Rightarrow X$ trennt u, v nicht.



Daraus: $\forall X \subseteq V$, $|X| < k$ ist $G[V \setminus X]$ zshg $\Rightarrow \kappa(G) \geq k$.