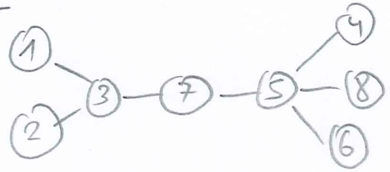
Cayley: $|\mathcal{T}_n| = n^{n-2}$. Sei $[n] = \{1, \dots, n\}$. Dann $|\mathcal{T}_n| = |[n]^{n-2}|$.

Sei $T = ([n], E)$ Baum. Konstruiere Folge $T_1, \dots, T_{n-1}$ mit $T_1 = T$ und für $1 \le i \le n-2$:

1) Sei v_i das kleinste Blatt in T_i, also $v_i = \min\{v \in V(T_i) : d_{T_i}(v) = 1\}$
2) Sei n_i der einzige Nachbar von v_i in T_i
3) $T_{i+1} := T_i[V(T_i) \setminus \{v_i\}]$.

Der Prüfer-Code $PC(T) = (n_1, \dots, n_{n-2})$. Klar: $PC(T) \in [n]^{n-2}$.

Bsp.



$v_1 = 1 \Rightarrow n_1 = 3$
$v_2 = 2 \Rightarrow n_2 = 3$
$v_3 = 3 \Rightarrow n_3 = 7 \dots$

$\Big\}$ 337555

Satz 2.12 $PC : \mathcal{T}_n \to [n]^{n-2}$ ist bijektiv.

Bew. Übung!

Lem 2.13 Sei T Baum und $P = PC(T)$. Dann:

$$d_T(v) = k \Leftrightarrow v \text{ kommt in } P \text{ genau } k-1 \text{ vor.}$$

Beweis. 1. Fall $v = v_i$ für ein $1 \le i \le n-2$. Dann ist v_i Blatt von T_i, und die Knoten in $N_T(v_i) \setminus N_{T_i}(v_i)$ sind nicht in T_i enthalten. Also gibt es Indizes $1 \le i_1 < i_2 \dots < i_s < i$, $s = |N_T(v_i) \setminus N_{T_i}(v_i)| = k-1$, so dass ein Nachbar von v war Blatt von T_{i_j}, $1 \le j \le s$, und wurde entfernt.

$\Rightarrow$ v kommt an genau den Stellen $i_1, \dots, i_s$ vor.

2. Fall $v \ne v_i \ \forall\, 1 \le i \le n-2$. Dann $v \in V(T_{n-1})$, wurde nie entfernt. Sei v' der andere Knoten in $V(T_{n-1})$.

Wie in Fall 1: jedes Mal, wenn $x \in N_T(v) \setminus \{v'\}$ entfernt wurde, wird v zum Code hinzugefügt. ✓

Satz 2.14 Sei $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. Dann ist die Anzahl der Bäume, so dass für alle $1 \le i \le n$ der Knoten i Grad d_i hat

$$(n-2)! \Big/ \prod_{i=1}^{n} (d_i - 1)!$$

Beweis. Mit Lem. 2.13: wir zählen Folgen in $[n]^{n-2}$ in denen i genau $(d_i - 1)$ Mal vorkommt, $1 \le i \le n$:

$$\underbrace{\binom{n-2}{d_1-1}}_{\text{Vorkommen von 1}} \cdot \underbrace{\binom{n-2-(d_1-1)}{d_2-1}}_{\text{von 2}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\binom{n-2-S_{i-1}}{d_i-1}}_{\text{von } i,\ \text{wobei } S_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} d_j - 1} \dots$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \binom{n-2-S_{i-1}}{d_i-1} = \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i-1)!}$$ ✓

2.2. Spannbäume

Def 2.15 Seien G, T Graphen. T heißt Spannbaum von G, falls T Baum und $V(T) = V(G)$. $\mathcal{T}(G) :=$ Menge der Spannbäume von G.

Lem 2.16 G zshg $\Leftrightarrow \mathcal{T}(G) \ne \emptyset$.

Beweis. Sei G zshg, $G_1 = G$. Wiederhole für $i \ge 1$:

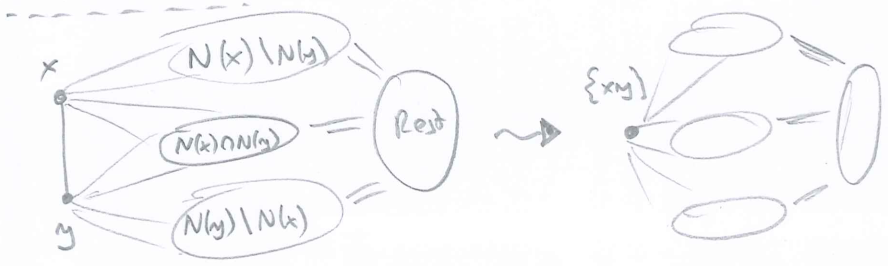
1) Falls G_i Kreis C_i enthält, wähle $e_i \in E(C_i)$ beliebig und setze $G_{i+1} := (V(G), E(G_i) \setminus \{e_i\})$.
2) Sonst: Stop!

Klar: $G_1, \dots, G_N$ zusammenhängend, und G_N hat keinen Kreis. ∎

Sei $\tau(G) = |\mathcal{T}(G)|$.

<u>Bsp.</u> $\tau(K_n) = n^{n-2}$. Falls G Baum, dann $\tau(G) = 1$.

<u>Kantenkontraktion</u>:

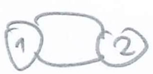


<u>Multigraph</u>: jede Kante enthält zwei unterschiedliche Knoten und eine Markierung, so dass alle Markierungen unterschiedlich sind: $e = \{uv, m_e\}$.

Sei G Multigraph, $e \in E(G)$, $e = \{xy, m\}$ mit $x \neq y$, m die Markierung von e. Konstruiere G/e folgendermaßen:

1. Lösche alle Kanten, die x, y enthalten.
2. Lösche x, y, füge neuen Knoten $\{xy\}$ hinzu.
3. Für jede Kante $\{zz', m'\} \in E$ mit $z \in \{x, y\}$, $z' \in N_G(x) \cup N_G(y) \setminus \{x, y\}$ füge die Kante $(\{xy\}z', m')$ hinzu.

<u>Bsp.</u>



Kreis

hat 3 Spannbäume.

<u>Lem 2.17</u> Sei G Multigraph, $e = \{xy, m\} \in E(G)$. Dann

$$\tau(G) = \tau(G/e) + \tau(G \setminus e)$$

mit $G \setminus e = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$.

<u>Beweis.</u> Sei $T_e(G) = \{T \in \mathcal{T}(G) : e \in E(T)\}$, $T_{\bar{e}}(G) = \mathcal{T}(G) \setminus T_e(G)$.

<u>Beob 1.</u> $T_{\bar{e}}(G) = T(G \setminus e)$, denn:

- Sei $T \in T_{\bar{e}}(G)$, dann $E(T) \subseteq E(G) \setminus \{e\}$ und $T \in T(G \setminus e)$
- Sei $T \in T(G \setminus e)$, dann $V(T) = V(G)$, $E(T) \subseteq E(G) \setminus \{e\}$, also $T \in T_{\bar{e}}(G)$.

<u>Beob 2.</u> $|\mathcal{T}(G/e)| = |T_e(G)|$. Betrachte dazu $T \mapsto T/e$ für $T \in T_e(G)$. Dann

- T/e ist zshg: alle Pfad in T mit x oder y werden auf Pfade abgebildet mit $\{xy\}$.
- T/e kreisfrei: ein Kreis in T/e muss $\{xy\}$ enthalten, und somit ist T nicht kreisfrei ↯.

Somit ist $T/e \in \mathcal{T}(G/e)$. Sei $f: T_e(G) \to \mathcal{T}(G \setminus e)$. Dann ist f injektiv ($T_1 \neq T_2 \Rightarrow f(T_1) \neq f(T_2)$) und surjektiv (für alle $T \in \mathcal{T}(G \setminus e)$ gibt es $T' \in T_e(G)$ mit $f(T') = T$). ∎

Für einen Multigraph G mit $V(G) = [n]$ sei

$$a_{ij} = \#\text{Kanten, die } ij \text{ enthalten}, \quad d_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ d_G(i), & i = j \end{cases}$$

und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

<u>Satz 2.18</u> (Matrix-Tree-Thm). Sei G Multigraph, $V(G) \geq 2$. Dann: $\tau(G) = \det(D - A)^{(11)}$