Satz 2.5. T Baum $\Leftrightarrow$ T zshg und $e(T) = v(T) - 1$.

Beweis. "$\Rightarrow$" Falls $v(T) = 1$, dann $T = \bullet$ ✓

Induktion. Falls $v(T) \geq 2$, dann gibt es Blatt $v \in V(T)$, und $T' = T[V \setminus \{v\}]$ Baum. Nach Annahme:

$$e(T') = v(T') - 1 \Rightarrow (e(T) - 1) = (v(T) - 1) - 1 \Rightarrow ✓$$

"$\Leftarrow$" Da T zshg ist $d(v) \geq 1$ $\forall v \in V$. Ferner:

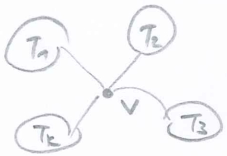
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2e(T) = 2v(T) - 2$$

Daraus: es gibt $v_0 \in V$ mit $d(v_0) = 1$, und $T' = T[V \setminus \{v\}]$ ist zshg. Ferner:

$$\left.\begin{aligned} e(T') &= e(T) - 1 \\ v(T') &= v(T) - 1 \end{aligned}\right\} \overset{\text{Annahme}}{\Rightarrow} e(T') = v(T') - 1.$$

Mit Induktion: T' ist Baum, also auch T Baum ✓. ∎

Kor. 2.6 Sei $T = (V, E)$ Baum, $v \in V$, $T_1, \dots, T_k$ die Komponenten von $T[V \setminus \{v\}]$. Dann:



1) $T_1, \dots, T_k$ sind Bäume

2) $k = d_T(v)$

Beweis. 1) $T_1, \dots, T_k$ sind nach Def zsgh. Außerdem sind sie kreisfrei als Teilgraphen von T.

2) Da $(V(T_1), \dots, V(T_k))$ Partition von $V \setminus \{v\}$:

$$v(T) = 1 + \sum_{i=1}^{k} v(T_i)$$

Da die T_i induzierte Teilgraphen sind:

$$E(T) = \{vw : w \in N_T(v)\} \cup \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} E(T_i)$$

$$\Rightarrow e(T) = d_T(v) + \sum_{i=1}^{k} e(T_i).$$

Aus (1): $e(T_i) = v(T_i) - 1$, und damit:

$$v(T) - 1 = e(T) = d_T(v) + \sum_{i=1}^{k} (v(T_i) - 1)$$

$$= d_T(v) - k + \sum v(T_i),$$

also $d_T(v) - k = 0$. ∎

Kor 2.7 Sei $T = (V, E)$ Baum, $e \in E$, und seien $T_1, \dots T_k$ die Komponenten von $(V, E \setminus \{e\})$. Dann: $k = 2$ und T_1, T_2 sind Bäume.

2.1. Zählen von Bäumen

$\mathcal{G}_n := \{(V, E) \mid V = [n], E \subseteq \binom{[n]}{2}\}$.

Dann $|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$.

Analog: $\mathcal{T}_n := \{G \in \mathcal{G}_n \mid G \text{ Baum}\}$.

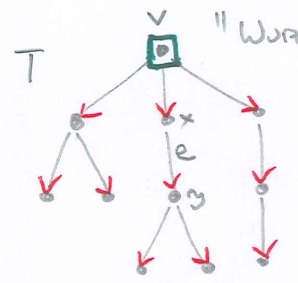
Bem wir betrachten nicht die Isomorphieklassen; zB ist der Stern mit n Knoten n Mal in $\mathcal{T}_n$ enthalten:

Satz 2.8 (Cayley) $|\mathcal{T}_n| = n^{n-2}$

Def 2.9 Ein *gewurzelter* Baum ist Paar (T,v) mit T Baum, $v \in V(T)$.

Klar: $|\mathcal{T}_n^\bullet| = n \cdot |\mathcal{T}_n|$.

$\{(T,v) : T \in \mathcal{T}_n, v \in [n]\}$



"Wurzel"

"Abstand 1"

"Abstand 2"

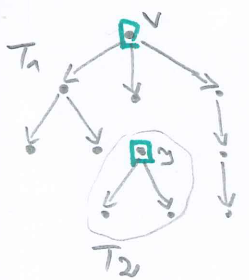
"Vorgänger von v"

"Kind von w"

Beob 1) Jeder Knoten hat eindeutigen Vorgänger. [eindeutige Pfade]

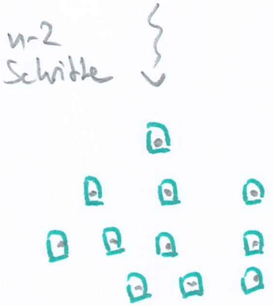
2) Jeder Knoten der kein Blatt ist hat ≥ 1 Kind.

Entferne Kante $e = xy$ (y Kind von x) aus (T,v): T_1, T_2



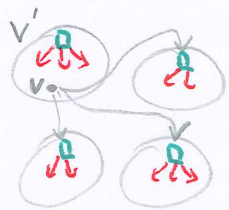
T zerfällt in 2 Komponenten ✓ (Kor 2.6), die eindeutig zu zwei gewurzelten Bäumen ergänzt werden können (T_1, v), (T_2, y).

Allgemein: durch Entfernen von i Kanten entstehen $i+1$ gewurzelte Bäume



Nach $n-1$ Kanten: n "triviale" gewurzelte Bäume.

Betrachte die umgekehrte Operation. Gegeben "Wald" von gewurzelten Bäumen, wie kann Kante eingefügt werden?



1) Wähle v *beliebig*.

2) Füge beliebige Kante zu *Wurzel* hinzu, außer v'.

Def 2.10 Ein *kantenmarkierter* gew. Baum ist ein Tripel (T, v, π) mit

1) $(T,v) \in \mathcal{T}_n^\bullet$ für ein $n \in \mathbb{N}$

2) $\pi : E(T) \to [n-1]$ bijektiv.

Somit ist $|\overline{\mathcal{T}}_n^\bullet| = (n-1)!\,|\mathcal{T}_n^\bullet| = n!\,|\mathcal{T}_n|$

$\{(T,v,\pi) : (T,v) \in \mathcal{T}_n^\bullet, \pi \text{ bijektiv}\}$.

Lemma 2.11 $|\overline{\mathcal{T}}_n^\bullet| = n!\, n^{n-2}$. $\longrightarrow$ Cayley ✓.

Beweis. Konstruiere Element in $\overline{\mathcal{T}}_n^\bullet$ folgendermaßen:

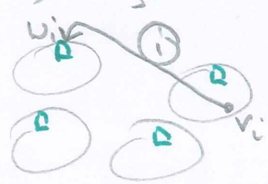
0) Starte mit n trivialen gewurzelten Bäumen.

$n-1$ Schritte. Im i-ten:

i1) Wähle Knoten v_i beliebig.

i2) Wähle beliebige Wurzel w_i, außer der Wurzel des Baumes, der v_i enthält.

i3) Füge Kante $v_i \xrightarrow{i} w_i$ hinzu



Beob 1) Z. Beginn des i-ten Schrittes sind $n-i+1$ gew. Bäume vorhanden.

<u>Beob 2</u> Sei $(T, v, \pi) \in \overline{T}_n^\circ$. Seien $e_1, \dots, e_{n-1}$ die Kanten von T, wobei

$$\pi(e_i) = i, \quad 1 \le i \le n-1, \quad \text{und} \quad e_i = v_i w_i$$

mit v_i dem Vorgänger von w_i in (T, v).

Dann: es gibt <u>genau eine</u> Möglichkeit, um (T, v, π) zu erzeugen: für $1 \le i \le n-1$ muss im i-ten Schritt v_i, w_i gewählt werden.

Wieviele unterschiedliche Objekte werden konstruiert?

$$\prod_{i=1}^{n-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wähle } v_i \\ \text{in } i1)}}{n} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wähle } w_i \\ \text{in } i2),\ \text{Beob } 1)}}{(n-i)} = n^{n-1} \cdot (n-1)! = n^{n-2} \cdot n!$$