II. Graphentheorie

1. Grundbegriffe

Def. 1.1 Ein Graph ist ein Paar $G=(V,E)$, wobei

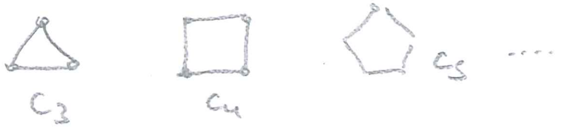
1) V endliche Menge – Knoten

2) $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{v,v'\} : v,v' \in V, v \neq v'\}$ – Kanten

Bsp. $n \in \mathbb{N}$, $[n] = \{1,\dots,n\}$.

1) $K_n = \left([n], \binom{[n]}{2}\right)$ – vollständiger Graph

2) $n \geq 3$, $C_n = ([n], \{\{1,n\}\} \cup \{\{i,i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\})$ – Kreis



3) $n \geq 1$, $P_n = ([n], \{\{i,i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\})$ – Pfad

Def 1.2 Seien $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$ Graphen. Wir nennen G_1, G_2 isomorph und schreiben $G_1 \simeq G_2$, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi: V_1 \to V_2$ ex, so dass

$uv \in E_1 \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E_2$ [wir schreiben uv statt $\{u,v\}$]

Wir unterscheiden im Sprachgebrauch nicht zwischen isomorphen Graphen.

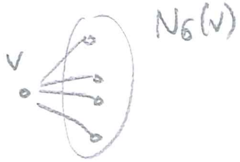
Bsp

$G \simeq P_4$ "G ist ein P_4"

Def 1.3 $G=(V,E)$ Graph, $v \in V$.

1) Die Nachbarschaft von v in G ist

$N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$



Der Grad von v ist $d_G(v) = |N_G(v)|$

v heißt isoliert, falls $|N_G(v)| = 0$

v heißt Blatt, falls $|N_G(v)| = 1$.

$V(G)$ – Knoten von G

$E(G)$ – Kanten

2) Minimal- / Maximal- / Durchschnittsgrad:

$\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$, $\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$

$\bar{d}(G) = \frac{\sum_{v \in V} d_G(v)}{|V|} \left(= \frac{2|E|}{|V|} \right)$

Lem 1.4 Sei $G=(V,E)$ Graph. Dann $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$.

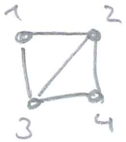
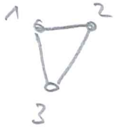
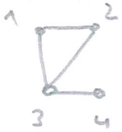
Beweis In der Summe wird jede Kante xy $2\times$ gezählt: $1\times$ in $d_G(x)$, $1\times$ in $d_G(y)$. ●

Def 1.5 1) Sei $G=(V,E)$ Graph, $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$. Dann ist

$G[U] = (U, \{e \in E : e \subseteq U\})$

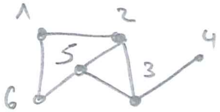
der durch U induzierte Teilgraph von G.

2) $G' = (V', E')$ heißt Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Bsp.  $= G$,  induzierter Teilgraph  (nicht induzierter) Teilgraph.

Def 1.6 Sei $G=(V,E)$ Graph. Ein Weg in G ist eine Folge $W=(v_0,v_1,\dots,v_k)$ von Knoten, so dass $v_iv_{i+1}\in E$, $0\le i<k$. W heißt Pfad, falls alle v_i unterschiedlich sind.

Die Länge von W ist $\ell(W)=k$ (= # Kanten).

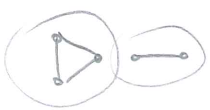
Bsp. 

1, 2, 5, 2, 3, 4 - Weg, kein Pfad

1, 2, 5, 6 - Weg, Pfad

Def 1.7 Ein Graph heißt zusammenhängend, falls für alle $u,v\in V$ ein Weg in G existiert, der u,v enthält.

 zshg.

 nicht zshg

Def 1.8 Sei G Graph. Eine Komponente von G ist ein maximaler induzierter Teilgraph, der zshg. ist.

Bem. Die Komponenten von G partitionieren $V(G)$.

Def 1.9 Sei $G=(V,E)$ Graph, $|V|=n$, $|E|=m$. Dann hat G $\geq n-m$ Komponenten.

Beweis: Induktion über m. Für $m=0$ hat G n isolierte Knoten, also n Komponenten, also $\geq n-m$ Komponenten ✓

Schritt $m\to m+1$.  

Durch Hinzufügen einer Kante bleibt die # Komp gleich oder verringert sich um 1.

$$\Rightarrow \#\text{Komp} \geq (n-m)-1 = n-(m+1) \quad ■$$

2. Bäume und Wälder !

Def 2.1 Ein Baum ist ein zshg. und kreisfreier Graph. Ein Wald ist ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind.

Bsp. 1)  Stern S_n mit $n-1$ Blätter.

2) Kreise sind keine Bäume.

Satz 2.2 Sei $T=(V,E)$ Graph. Dann äquivalent:

1) T ist Baum

2) $\forall u,v\in V$ gibt es genau einen $\overset{\text{Start}}{\overset{\downarrow}{u}}-\overset{\text{Ende}}{\overset{\downarrow}{v}}$ Pfad

3) T minimal zshg: $\forall e\in E: (V, E\setminus\{e\})$ nicht zshg.

4) T max. kreisfrei: $\forall e\in\binom{V}{2}\setminus E$ hat $(V, E\cup\{e\})$ einen Kreis.

Bew. 1) ⇒ 2) Seien $u,v\in V$ so dass zwei unterschiedliche u-v Pfade existieren

$P = u w_1 w_2 \dots w_\ell v$

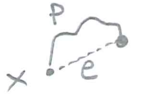
$P' = u w_1' \dots w_k' v$

a). $\{w_1\dots w_\ell\}\cap\{w_1'\dots w_k'\}=\emptyset$. Dann induziert $V(P)\cup V(P')$ einen Kreis in T ↯

b) Sonst sei $w \in \{w_1, \dots, w_\ell\}$ der erste Knoten in P, der auch in P' liegt. Sei P_1 der u-w Pfad in P, P_1' der u-w Pfad in P'. Dann induziert $V(P_1) \cup V(P_1')$ einen Kreis in G ↯.

<u>2) ⇒ 3)</u> Sei $e = xy \in E$. Dann ist der einzige x-y Pfad in G die Kante e ⇒ In $(V, E \setminus \{e\})$ gibt es keinen x-y Pfad ✓

<u>3) ⇒ 4)</u> Sei $xy \in \binom{V}{2} \setminus E$. Da T zshg gibt es x-y Pfad P in T.



⇒ $P \cup \{xy\}$ hat Kreis. ✓

<u>4) ⇒ 1)</u> Seien $x, y \in V$ mit $xy \notin E$. Da $T \cup \{xy\}$ Kreis enthält, gibt es in T einen x-y Pfad. ✓ □

<u>Lem 2.3</u> Jeder Baum $T = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ enthält ≥ 2 Blätter.

<u>Bew.</u> Sei $P = x_1 \dots x_k$ ein Pfad <u>maximaler</u> Länge in T, $k \geq 2$.

① $N(x_1) \subseteq \{x_2, \dots, x_k\}$, da sonst P nicht max!

② $x_3, \dots, x_{k-1}, x_k \notin N(x_1)$, da sonst ∃ Kreis in T!

Aus ①+②: $N(x_1) = \{x_2\}$, also x_1 Blatt. Analog für x_k. □

<u>Lem 2.4</u> Sei $T = (V, E)$ Baum, $|V| \geq 2$, $v \in V$ Blatt. Dann $T' = T[V \setminus \{v\}]$ auch ein Baum.

<u>Bew.</u> T' hat keinen Kreis, da Teilgraph von T. Zu zeigen: T' zshg. Seien $x, y \in V \setminus \{v\}$. In T gibt es x-y Pfad

$$x \; v_1 \; v_2 \; \dots \; v_k \; y$$

Damit gilt: $d_T(v_i) \geq 2 \;\; \forall \, 1 \leq i \leq k$, und somit $v_i \neq v \;\; \forall \, 1 \leq i \leq k$. Also ist P in T' enthalten ✓ □

<u>Bem.</u> Lem 2.4 gilt genauso für alle zshg Graphen, nicht nur Bäume.