__Euler Summation:__ $\sum_{a\le k<b} f(k) = F(b) - F(a) + \sum_{k=1}^{m} (T_k(b) - T_k(a)) + R_m$

mit $F = \int f\,dx$, $T_k = \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)$, $R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx$.

Falls $f^{(m)}(x) = O(x^{c-m})$, $c < m-1$, dann $\exists\, C \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = F(n) + \sum_{k=1}^{m} T_k(n) + C + \underbrace{O(n^{c+1-m})}_{\to 0}$$

__Andere Formen;__ folgen aus $\frac{B_{2m}}{(2m)!} = O((2\pi)^{-2m})$ [ohne Bew.]

1) $$\sum_{a\le k<b} f(k) = F(b) - F(a) + \sum_{k=1}^{m} (T_{2k}(b) - T_{2k}(a)) - \frac{1}{2}(f(b) - f(a))$$
$$+ O\left((2\pi)^{-2m}\right) \cdot \int_a^b |f^{(2m)}(x)|\,dx$$

2) Falls $f^{(2m+2)}, f^{(2m+4)} \ge 0$ oder ≤ 0, $x \in [a,b]$, dann

$$R_{2m} = \theta_m \cdot \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+1)}(x)\Big|_a^b, \quad \theta_m \in [-1, 1]$$

__Satz 2.8__ Es gibt $\sigma \in \mathbb{R}$, $\theta_{m,n} \in \mathbb{R}$ mit

$$\ln((n-1)!) = n\ln n - n - \frac{\ln n}{2} + \sigma + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} n^{-2k+1}$$
$$+ \theta_{m,n} \cdot \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)} \cdot n^{-2m-1}$$

__Bew.__ $\ln((n-1)!) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k$; wende Euler mit $f(x) = \ln x$ an.

Wir erhalten: $\int_1^n \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^n = n\ln n - n + 1$.

$1/x, -1/x^2$
$2/x^3, -6/x^4 ..$

Ferner: $T_1(n) = B_1 f(n) = -\frac{1}{2}\ln n$ und

$$T_{2k}(n) = \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) = \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2k-2)!\, n^{-2k+1}$$

Die Aussage folgt mit 2). $\square$

Wir erhalten: $\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \sigma + \frac{1}{12}n + O(1/n^2)$

also Stirlings Formel: $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \cdot e^{\sigma} \cdot (1 + 1/12n + O(n^{-2}))$

Was ist σ?

__Lem 2.6__ $\sigma = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

__Beweis__ Berechne $A_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{2n}{k}$ auf zwei Arten.

Mit Binomialsatz: $A_n = 2^{2n}$. Asymptotische Summation

$$A_n = \sum_k \binom{2n}{k} = \sum_k \binom{2n}{n+k} = \sum_k \underbrace{\frac{(2n)!}{(n+k)!\,(n-k)!}}_{a_k(n)}$$

Wir schreiben $\binom{2n}{n+k} = b_k(n) + O(c_k(n))$ uniform für $k \in D_n \subseteq \mathbb{Z}$ und erhalten

$$A_n = \sum_k b_k(n) + O\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus D_n} a_k(n) + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus D_n} b_k(n) + \sum_{k\in D_n} |c_k(n)|\right).$$

Betrachte dafür:

$$\ln a_k(n) = \ln(2n)! - \ln((n+k)!) - \ln((n-k)!)$$
$$= 2n\ln(2n) - 2n + \frac{\ln(2n)}{2} + \sigma + O(1/n)$$
$$- (n+k)\ln(n+k) + n+k - \frac{\ln(n+k)}{2} - \sigma + O(1/n+k)$$
$$- (n-k)\ln(n-k) + n-k - \frac{\ln(n-k)}{2} - \sigma + O(1/n-k)$$

Mit $\ln(n \pm k) = \ln n + \ln(1 \pm k/n)$ erhalten wir für $n \pm k$ groß, z.B. $n \pm k \in [\frac{n}{2}, \frac{3n}{2}]$

$$\ln a_k(n) = (2n + 1/2)\ln 2 - 6 - \frac{\ln n}{2} + o(1/n)$$
$$- (n+k+1/2)\ln(1+k/n) - (n-k+1/2)\ln(1-k/n)$$

Wir wählen: $D_n = \{ k \in \mathbb{Z} : |k| \le n^{1/2+\varepsilon} \}$, $\varepsilon = 1/9$.

Für $k \in D_n$ erhalten wir:

$$\ln(1 \pm k/n) = \pm\frac{k}{n} - \frac{k^2}{2n^2} + O\left(k^3/n^3\right) = \pm\frac{k}{n} - \frac{k^2}{2n^2} + O\left(n^{-3/2+3\varepsilon}\right)$$

Mit $n \pm k + 1/2$ multipliziert:

$$\pm k + \frac{k^2}{2n} + O\left(\frac{k^3}{n^2} + n^{-1/2+3\varepsilon}\right) = \pm k + \frac{k^2}{n} + o(1).$$

Daraus:

$$\ln a_k(n) = (2n + 1/2)\ln 2 - 6 - \frac{\ln n}{2} - \frac{k^2}{n} + O\left(n^{-1/2+3\varepsilon}\right),$$

also

$$a_k(n) = \frac{2^{2n+1/2}}{e^6} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot e^{-k^2/n} \cdot \left(1 + O\left(n^{-1/2+3\varepsilon}\right)\right) \quad (*)$$

Setze:

$$b_k(n) = \frac{2^{2n+1/2}}{e^6\sqrt{n}} e^{-k^2/n}, \quad c_k(n) = 2^{2n} \cdot n^{-1+3\varepsilon} \cdot e^{-k^2/n}.$$

Wir erhalten:

1) $$\sum_k b_k(n) = \frac{2^{2n+1/2}}{e^6\sqrt{n}} \sum_k e^{-k^2/n} = 2^{2n} \frac{\sqrt{2\pi}}{e^6}(1 + o(1)).$$

(mit Bsp. aus letzter VL)

2) $$\sum_{k \in D_n} |c_k(n)| = 2^{2n} \cdot n^{-1+3\varepsilon} \sum_{k \in D_n} e^{-k^2/n}$$
$$\le 2^{2n} \cdot n^{-1+3\varepsilon} \cdot |D_n|$$
$$= 2^{2n} \cdot n^{-1/2+4\varepsilon} = o(2^{2n}).$$

3) $$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus D_n} a_k(n) \le 2n \cdot \max_{k \in \mathbb{Z} \setminus D_n} \{a_k(n)\}$$
$$= O(n) \cdot a_{n^{1/2+\varepsilon}}(n) \overset{(*)}{=} o(2^{2n}).$$

Aus 1), 2), 3): $A_n = 2^{2n} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{e^6} \cdot (1 + o(1))$, also

$\sqrt{2\pi} \cdot e^{-6} = 1$. ✓ ∎