2. Asymptotik

<u>Bsp</u> Vergleiche F_n mit $\binom{n}{n/2}$. Wir wissen: $F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{n}} + \varepsilon_n$ mit $\varepsilon_n \to 0$. Wir werden sehen:

$$\binom{n}{n/2} = 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot (1 + \varepsilon_n)$$

Da $1.681 \approx \varphi < 2$ ist $\binom{n}{n/2}$ <u>viel</u> größer als F_n.

2.1. Hierarchien von Funktionen & O-Notation

<u>Def 2.1</u> Seien $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oder $f, g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Wir schreiben:

$$f \ll g, \quad f(n) \ll g(n) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0$$
$$f = o(g), \quad f(n) = o(g(n))$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0$ gibt es $n_0(\varepsilon)$ mit $|f(n)| \leq \varepsilon |g(n)| \; \forall n \geq n_0$.

Insbesondere: $f(n) \ll g(n) \Leftrightarrow 1/g(n) \ll 1/f(n)$.

<u>Bsp.</u> Seien $0 < \varepsilon < 1 < c$. Dann:

$$1 \ll \log n \ll n^\varepsilon \ll n^c \ll n^{\log n} \ll c^n \ll n^n.$$

<u>Kor. 2.2</u> $e^{f(n)} \ll e^{g(n)} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (f(n) - g(n)) = -\infty$.

<u>Beweis</u> Aus Def:

$$LS \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} e^{f(n)-g(n)} = 0 \overset{\text{Stet. von } e^x}{\Leftrightarrow} RS. \quad \blacksquare$$

<u>Def 2.3</u> Wir schreiben $f(n) = O(g(n))$ falls es $C > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|f(n)| \leq C \cdot |g(n)| \quad \forall n \geq n_0.$$

<u>Bsp.</u> $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3} n \cdot (n + 1/2)(n+1)$. Dann:

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \underbrace{\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}_{} \longrightarrow \leq n^3, \text{ also } S_n = O(n^3)$$
$$\hookrightarrow = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$$
$$\hookrightarrow O(n^{10})$$

<u>Vorsicht!</u> In der O-Notation sind Gleichungen "Ein-Weg-Gleichungen"; z.B. $n^2 = O(n^{10})$, aber $O(n^{10}) = n^2$ macht keinen Sinn! Formal:

$$O(g(n)) = \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists C > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } |f(n)| \leq C \cdot |g(n)| \; \forall n \geq n_0 \}$$

Dann: $f = O(g)$ bedeutet $\{f\} \subseteq O(g)$.

<u>Analog</u>: untere Schranken.

$$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = O(f(n))$$
$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f = O(g) \text{ und } f = \Omega(g)$$

Asymptotische Äquivalenz:

$$f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow f(n) = g(n) + o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Definiere auch: $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = o(f(n))$.

Lem 2.4 1) $O(f) + O(g) = O(|f| + |g|)$

2) $O(O(f(n))) = O(f(n))$

3) $O(f) \cdot O(g) = O(f g)$

4) $O(f \cdot g) = f \cdot O(g)$

5) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $c \cdot O(f) = O(f)$.

Analog für $o(\cdot)$.

Beweis. Die LS steht für die Summe zweier Fkt $a(n), b(n)$ mit den Eigenschaften:

$\exists\, C_f > 0,\ n_f \in \mathbb{N}: \quad |a(n)| \le C_f \cdot |f(n)| \quad \forall n \ge n_f$

$\exists\, C_g > 0,\ n_g \in \mathbb{N}: \quad |b(n)| \le C_g\, |g(n)| \quad \forall n \ge n_g.$

Damit ist

$$|a(n) + b(n)| \le \max\{C_f, C_g\} \cdot (|f(n)| + |g(n)|) \quad \forall n \ge \max\{n_f, n_g\},$$

also $a(n) + b(n) = O(|f(n)| + |g(n)|)$. ✓

2) – 5) analog.

Bsp. 1) Sei $f(n) = o(1)$. Dann $\ln(1 + O(f(n))) = O(f(n))$.

Beweis. Sei $\ln(1 + g(n))$ eine Funktion in der linken Seite. Dann gibt es $C > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|g(n)| \le C \cdot |f(n)|$ $\forall n \ge n_0$.

Da $f(n) = o(1)$ gibt es $c \in (0,1)$ und $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|g(n)| \le c \quad \forall n \ge n_1.$$

Daraus: für $n \ge n_1$
$$\ln(1+g) = g - g^2/2 + g^3/3 - \dots$$
$$= g \cdot (1 - g/2 + g^2/3 - \dots)$$
$$\le g \cdot (1 + c + c^2 + \dots) = g \cdot \frac{1}{1-c} = O(g) = O(f).$$

2) Sei $f(n) = o(1)$. Dann $e^{O(f(n))} = 1 + O(f(n))$.

Beweis analog. ✓ $\qquad \dfrac{1}{1 + O(f(n))} = 1 + O(f(n))$.

2.2. Asymptotische Summation

Möchte: $\sum_k a_k(n)$ bestimmen, für $n \to \infty$.

[Bsp. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k^2/n}$]. Strategie: "Dominanter Teil"

1) Summation aufbrechen in $D_n \cup R_n$ "Rest"

2) Finde Abschätzung
$$a_k(n) = b_k(n) + O(c_k(n)), \quad k \in D_n \quad \text{(uniform!)}$$

3) Zeige, dass
$$S_a(n) = \sum_{k \in R_n} a_k(n), \quad S_b(n) = \sum_{k \in R_n} b_k(n), \quad S_c(n) = \sum_{k \in D_n} |c_k(n)|$$
sind klein.

Mit 1), 2), 3): $\sum_k a_k(n) = \sum_k b_k(n) + O(S_a + S_b + S_c)$.

Bsp. Berechne $L_n = \sum_{k \ge 0} \dfrac{\ln(n + 2^k)}{k!}$ asymptotisch für $n \to \infty$.

$$\ln(n + 2^k) = \ln n + \ln(1 + 2^k/n)$$

$$[k < \log_2 n] \quad = \ln n + 2^k/n - \frac{2^{2k}}{2n^2} + T_n$$

mit $T_n = \sum_{m \ge 3} \dfrac{2^{km}}{m \cdot n^m} \le \dfrac{2^{3k}}{n^3} \sum_{m \ge 0} \dfrac{2^{km}}{n^m}$

Für $k < \lfloor \log_2 n \rfloor$ ist $T_n \leq \frac{2^{3k}}{n^3} \cdot 2$.

Wende 1), 2), 3) an mit:

$$a_k(n) = \frac{\ln(n+2^k)}{k!}, \quad b_k(n) = \frac{\ln n + 2^k/n - \frac{2^{2k}}{2n^2}}{k!}, \quad c_k(n) = 2^{3k}/n^3 k!$$

Dann gilt für $k \in D_n := \{0, \dots, \lfloor \log_2 n \rfloor - 1\}$:

$$a_k(n) = b_k(n) + O(c_k(n)) \qquad (2))$$

Wir erhalten:

$$\sum_{k \geq 0} b_k(n) = \sum_{k \geq 0} \frac{\ln n + 2^k/n - 2^{2k-1}/n^2}{k!}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{\ln n}{k!} + \sum_{k \geq 0} \frac{2^k}{k!} \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k \geq 0} \frac{2^{2k-1}}{k!} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$= e \cdot \ln n + e^2/n + e^4/2n^2$$

Zeigen nun, dass $S_a, S_b, S_c = o(n^{-2})$.

$$S_a = \sum_{k \geq \lfloor \log_2 n \rfloor} a_k(n) \leq \sum_{k \geq \lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{k + \ln n}{k!} \leq 2 \sum_{k \geq \lfloor \log_2 n \rfloor} 1/(k-1)!$$

Für $s > 2$ ist $(s+t)! \geq s! \cdot 2^t$. Damit

$$S_a \leq \frac{2}{(\lfloor \log_2 n \rfloor - 1)!} \cdot \sum_{k \geq 0} 2^{-k} = O\left(1/(\lfloor \log_2 n \rfloor - 1)! \right).$$

Aber $s! \geq (s/2)^{s/2}$; für $s = \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$ ist somit

$s! \gg n^c$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Insgesamt:

$$S_a = o(n^{-2}).$$

Ferner ist

$$S_b \leq \sum_{k \geq \lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{\ln n + 2^k + 4^k}{k!} \leq \frac{3 \cdot n^2}{\lfloor \log_2 n \rfloor !} \cdot \sum_{k \geq 0} 2^{-k} = o(n^{-2}),$$

und auch

$$S_c = \sum_{k \in D_n} \frac{2^{3k}}{n^3 \cdot k!} \leq n^{-3} \sum 2^{3k}/k! = O(n^{-3}).$$

Damit:

$$\sum_{k \geq 0} a_k(n) = e \ln n + e^2/n + e^4/2n^2 + o(n^{-2}). \checkmark$$

Euler Summation

Sei $B_m(x) = \sum_k \binom{m}{k} B_k x^{m-k}$ "m-tes Bernulli-Polynom"

Satz 2.6 Sei $a \le b$, $m \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ m Mal stetig diffbar. Dann

$$\sum_{a \le k < b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{1 \le k \le m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m$$

wobei $R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\, dx$, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Bsp. $f(x) = x^{m-1}$, dann $f^{(m)}(x) = 0$ und

$$\sum_{a \le k < b} f(k) = \sum_{a \le k < b} k^{m-1} = \frac{x^m}{m}\Big|_a^b + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} (m-1)^{\underline{k-1}} \cdot x^{m-k}\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k \left(b^{m-k} - a^{m-k}\right) \checkmark$$

Beweis. Es genügt $a=0, b=1$ zu betrachten, d.h. wir zeigen:

$$f(0) = \int_0^1 f(x)dx + \sum_{1 \le k \le m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_0^1 + (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)dx.$$

Induktion über m. Fall $m=1$: zu zeigen:

$$f(0) = \int_0^1 f(x)dx \underbrace{-\frac{1}{2}}_{B_1} (f(1) - f(0)) + \int_0^1 \underbrace{(x - 1/2)}_{B_1(\{x\})} f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(1) + f(0)}{2} = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 (x - 1/2) f'(x)dx.$$

Setze $u(x) = f(x)$, $v(x) = x - 1/2$. Dann ist das genau partielle Integration:

$$u(x)v(x)\Big|_0^1 = \int_0^1 u(x)v'(x)dx + \int_0^1 u'(x)v(x)dx \checkmark$$

Schritt $m-1 \to m$ Es genügt zu zeigen, dass

$$R_{m-1} = \frac{B_m}{m!} f^{(m-1)}(x)\Big|_0^1 + R_m, \text{ also}$$

$$(-1)^m \int_0^1 \frac{B_{m-1}(x)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x)dx$$

$$= \frac{B_m}{m!} f^{(m-1)}(x)\Big|_0^1 + (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx$$

$\Leftrightarrow$

$$(-1)^m B_m f^{(m-1)}(x)\Big|_0^1 = m \int_0^1 B_{m-1}(x) f^{(m-1)}(x)dx + \int_0^1 B_m(x) f^{(m)}(x)dx.$$

Partielle Integration mit

$$u(x) = f^{(m-1)}(x), \quad v(x) = B_m(x)$$

Dann

$$u(x)v(x)\Big|_0^1 = B_m(1) f^{(m-1)}(1) - B_m(0) f^{(m-1)}(0)$$

$$= B_m \cdot \left(f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0)\right)$$

$$= (-1)^m B_m \cdot f^{(m-1)}(x)\Big|_0^1, \text{ da } B_m = 0 \text{ für } m \ge 2 \text{ ungerade}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial x} B_m(x) = \sum_k \binom{m}{k} B_k x^{m-k-1} \cdot (m-k)$$

$$= m \sum_k \binom{m-1}{k} B_k x^{m-k-1} = m B_{m-1}(x). \checkmark$$

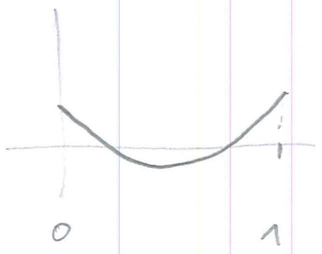
Bsp. Sei $S_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k^2/n}$. Dann für $M > 0$: $S_n = \sqrt{\pi n} + O(n^{-M})$.

Beob.

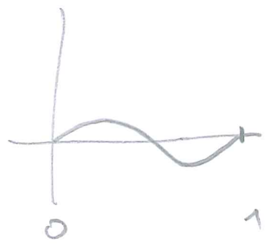
$$B_m(0) = \binom{m}{m} B_m = B_m$$

$$B_m(1) = \sum_k \binom{m}{k} B_k$$

$$= B_m \quad \text{für } m \geq 2.$$



$B_2(x)$



$B_3(x)$

Bernoulli-Zahlen:

$$\rightarrow \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = \mathbb{1}[m=0] \quad , m \in \mathbb{N}_0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} B_j = \mathbb{1}[m=0] + B_{m+1}.$$

$\rightarrow$ $B_m = 0$ für $m \geq 3$ ungerade. (ohne Beweis).

__Bew.__ Sei $L > 0$, $f(x) = e^{-x^2/n}$. Wende Euler-Summation auf $S_{n,L} = \sum_{k=-L}^{L} f(k)$ an, und anschließend $S_n = \lim_{L\to\infty} S_{n,L}$.

Es gilt:

$$\lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/n}\,dx \underset{x = u\sqrt{n}}{\uparrow}{=} \sqrt{n}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi n}$$

Sei $g(x) = e^{-x^2}$, und damit $f(x) = g(x/\sqrt{n})$. Wir erhalten:

$$f'(x) = n^{-1/2} g'(x), \ \dots, \ f^{(k)}(x) = n^{-k/2}\cdot g^{(k)}(x/\sqrt{n}).$$

Ferner:

$$g'(x) = -2x e^{-x^2}, \quad g''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2},$$

und allgemein, für $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es Polynom vom Grad k so dass $g^{(k)}(x) = P_k(x)\cdot e^{-x^2}$.

Insbesondere: $\lim_{x\to+\infty} g^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} g^{(k)}(x)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Daraus: $\lim_{L\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_{-L}^{L} = 0$.

Betrachte Rest: $|R_m| \le \int_{-L}^{L} \left|\frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\right| dx$

$$= O(1)\cdot\int_{-L}^{L} |f^{(m)}(x)|\,dx$$

$$= O(1)\cdot n^{-m/2}\cdot\int_{-L}^{L} \left|P_m\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right|\cdot e^{-x^2/n}\,dx$$

$$\underset{u = x/\sqrt{n}}{\uparrow}{=} O(n^{-m/2+1/2})\cdot\int_{-L}^{L} |P_m(u)|\, e^{-u^2}\,du$$

Aber $\sup_L \int_{-L}^{L} P_m(u) e^{-u^2}\,du < \infty$

und somit $R_m = O(n^{-m/2+1/2})$. ✓ ∎

Betrachte nun Summen der Form $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$; wir möchten S_n für $n\to\infty$ bestimmen. Mit Euler:

$$S_n = F(n) - F(1) + \sum_{k=1}^{m}\left(T_k(n) - T_k(1)\right) + R_m(n)$$

wobei $F = \int f\,dx$, $T_k(x) = \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)$. Falls $c < m-1$ existiert mit $f^{(m)}(x) = O(x^{c-m})$ (für $x\to\infty$), dann existiert auch

$$\lim_{n\to\infty} R_m(n) = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx,$$

und

$$|R_m(\infty) - R_m(n)| \le \int_n^{\infty} \left|\frac{B_m(\{x\})}{m!}\right| |f^{(m)}(x)|\,dx = O(n^{c+1-m})$$

Wir erhalten: es gibt C mit:

$$\boxed{S_n = F(n) + C + \sum_{k=1}^{m} T_k(n) + O(n^{c+1-m})}$$

[explizit: $C = F(1) - \sum_{k=1}^{m} T_k(1) + R_m(\infty)$].

Kor. 2.7 $H_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma - \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k} n^{-2k} + O(n^{-2m-2})$

Beweis. Euler Summation mit $f(x) = 1/x$. Dann:

$$f^{(m)}(x) = (-1)^m (m-1)! \cdot x^{-m-1} \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

und somit existiert $C \in \mathbb{R}$ mit

$$H_{n-1} = \int_1^n f(x)\,dx + C + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + O(n^{-2m-2})$$

$$= \ln n + C + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k} \cdot n^{-2k} + O(n^{-2m-2})$$

Aber $|H_n - \ln n| \to \gamma$, also $C = \gamma$. ∎

Insbesondere: $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O(n^{-4})$.