__Beweis__ Induktion über n. $n=0$ ✓. Schritt $n-1 \to n$:

$$x^n = x \cdot x^{n-1} \overset{(IA)}{=} x \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}_0} S_{n-1,k} \cdot x^{\underline{k}}$$

$$(x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k), k \in \mathbb{N}_0) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} S_{n-1,k} \cdot x^{\underline{k+1}} + \sum_{k \in \mathbb{N}_0} S_{n-1,k} \cdot k x^{\underline{k}}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} x^{\underline{k}} \left(S_{n-1,k-1} + k \, S_{n-1,k} \right)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}}. \qquad \blacksquare$$

Analog kann man mit $S_{n,k}, \bar{S}_{n,k}$ zwischen beliebigen Potenzen und faktoriellen umrechnen.

__1.3. Binomialkoeffizienten__

$\binom{n}{k} = \#$ k-elementiger Teilmengen einer n-elem. Menge

$\rightsquigarrow \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$ ← n Mögl. für 1. Elem, $n-1$ für 2. Elem, …, $n-k+1$ für k. Elem; $k!$ Permutationen

$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Für $r \in \mathbb{R}$ sei

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} r^{\underline{k}}/k!, & k \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

__Bem.__ 1) keine kombinatorische Interpretation

2) $\binom{r}{k}$ Polynom vom Grad k in r

3) $\binom{n}{n} = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

__Eigenschaften:__

__Symmetrie:__ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Für $n<0$ gilt die Identität nicht!

__Absorption:__ $\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$, $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Folgt aus $r^{\underline{k}} = r \cdot (r-1)^{\underline{k-1}}$, $k! = k \cdot (k-1)!$, und für $k<0$ sind beide Seiten $=0$.

__Lem 1.9__ $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Dann

$$(r-k)\binom{r}{k} = r \cdot \binom{r-1}{k} \qquad (*)$$

__Beweis__ Für $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(r-k)\binom{r}{k} = (r-k)\binom{r}{r-k} \quad \text{(Sym.)}$$
$$= r \cdot \binom{r-1}{r-k-1} \quad \text{(Abs.)}$$
$$= r \cdot \binom{r-1}{k} \quad \text{(Sym.)}$$

$r \in \mathbb{R}$? Beide Seiten von $(*)$ sind Polynome in r vom Grad $k+1$. Falls die Polynome an $\geq k+1$ Stellen übereinstimmen sind sie somit gleich. Wir haben gezeigt: $(*)$ gilt für unendlich viele r. $\blacksquare$

__Additionsformel:__ $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$, $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

__Beweis__ Sei $r \in \mathbb{N}$. Kombinatorisch:

$LS = \#$ k-elem. Teilmengen von $\{1,\dots,r\}$

$RS = \#$ k-elem. Teilmengen von $\{1,\dots,r-1\}$ +

$+ \#\,(k-1)$-elem. Teilmengen von $\{1,\dots,r-1\}$

$= LS$ ✓.

$r\in\mathbb{R}$ folgt mit Polynomargument.

__Lem 1.10__ Für $m,n\in\mathbb{N}_0$:

$$\sum_{0\le k\le n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

__Beweis.__ RS = wähle $m+1$ Elemente aus $\{0,\dots,n\}$.

LS = Wähle eine Menge $S\subseteq\{0,\dots,n\}$ folgendermassen:

1) Füge $k\in\{0,\dots,n\}$ zu S hinzu
2) Füge m Elemente aus $\{0,\dots,k-1\}$ zu S hinzu $\to \binom{k}{m}$ Mögl.

Dann ist S eine $m+1$-elem. Teilmenge von $\{0,\dots,n\}$, und jede solche Teilmenge wird genau 1x erzeugt.

__Kor. 1.11__ Für $r\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k\le n}\binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$.

__Beweis.__ Für $r\in\mathbb{N}$:

$$LS = \sum_{-r\le k\le n}\binom{r+k}{k} \qquad [\text{sogar } k\ge 0]$$

$$= \sum_{-r\le k\le n}\binom{r+k}{r} \qquad [\text{Sym}]$$

$$= \sum_{0\le k\le n+r}\binom{k}{r} \overset{(\text{Lem }1.10)}{=} \binom{n+r+1}{r+1} \overset{[\text{Sym}]}{=} \binom{n+r+1}{n}$$

__Satz 1.12__ (Binomialsatz) Sei ($r\in\mathbb{N}_0$) oder ($r\in\mathbb{R}$ und $|x/y|<1$) mit $x,y\in\mathbb{C}$. Dann

$$(x+y)^r = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\binom{r}{k}x^k y^{r-k}.$$

__Beweis__ [Polynomargument nicht möglich!] Sei $f(z)=(1+z)^r$; wir zeigen $f(z)=\sum\binom{r}{k}z^k$ für $|z|<1$. Die Aussage folgt dann mit

$$(x+y)^r = y^r\cdot(1+x/y)^r = y^r\cdot f(x/y).$$

Mit Taylor:

$$f(z)=\sum_{k\ge0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$$

Es gilt: $f^{(1)}(z)=r\cdot(1+z)^{r-1}$, $f^{(k)}(z)=r^{\underline{k}}(1+z)^{r-k}$,

also $f^{(1)}(0)=r$, $f^{(k)}(0)=r^{\underline{k}}$.

und damit $f(z)=\sum_{k\ge0}\binom{r}{k}z^k$ falls die rechte Seite konvergiert. Mit Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}z^{k+1}\Big/\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k\right| = \left|\frac{r^{\underline{k+1}}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{r^{\underline{k}}}\,z\right|$$

$$= \Bigl|\underbrace{\frac{r-k}{k+1}}_{\to -1}\cdot \underbrace{z}_{\sim}\Bigr| \underset{1\cdot|z|}{} < 1 \text{ für alle bis auf endlich viele } k.$$

Negationseigenschaft $\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}$, $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Für $k<0$ sind beide Seiten $=0$. Sonst:

$$\binom{r}{k} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \frac{r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-k+1)}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{(k-r-1) \cdot \ldots \cdot (-r)}{k!}$$ ▪

Bsp. 1) $(-1)^n \binom{-m-1}{n} = \binom{n+m}{n} = (-1)^m \cdot \binom{-n-1}{m}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$.

2) Alternierende Summen. Für $m \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k \leq m} \binom{r}{k} (-1)^k = \sum_{k \leq m} \binom{k-1-r}{k} \overset{(\text{Kor. 1.11})}{=} \binom{m-r}{r} = (-1)^m \binom{r-1}{m}.$$

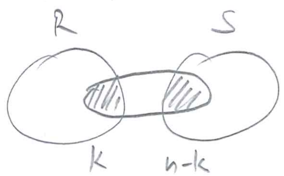
Satz 1.13 (Vandermonde) Seien $m, n \in \mathbb{Z}$, $r, s \in \mathbb{R}$. Dann

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}$$

Beweis. $r, s \in \mathbb{N}_0$; allg. Fall mit Polynomargument.
Ersetze k mit $k-m$ und n mit $n-m$. Dann zu zeigen:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \ r, s \in \mathbb{N}_0.$$

Kombinatorisch. Gegeben zwei disjunkte Mengen R, S mit $|R| = r$, $|S| = s$. Dann:



RS = wähle aus $R \cup S$ n Elemente aus.

Wähle aus $R \cup S$ n Elemente aus, indem zuerst k Elemente aus R gewählt werden $\binom{r}{k}$, dann Rest aus S. $\to$ LS. ▪

Multinomialkoeffizenten

$\binom{n}{k}$ kann geschrieben werden als $\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$

Analog: Trinomialkoeffizient

$$\binom{a+b+c}{a, b, c} = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!} = \binom{a+b+c}{a} \cdot \binom{b+c}{b}$$

Dies ist die #Möglichkeiten, eine Menge mit $a+b+c$ Elementen in drei Mengen mit Größen a, b, c zu partitionieren. Analog definieren wir

$$\binom{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{a_1, \ldots, a_m} = \frac{(a_1 + \ldots + a_m)!}{a_1! \cdot \ldots \cdot a_m!}$$

$$= \binom{a_1 + \ldots + a_m}{a_1} \cdot \binom{a_2 + \ldots + a_m}{a_2} \cdot \ldots \cdot \binom{a_{m-1} + a_m}{a_{m-1}}$$

Multinomialsatz $\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n = \sum_{S} \binom{n}{a_1 \ldots a_m} \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i}$

mit $S = \{(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{i=1}^{m} a_i = n\}$.

1.4. Harmonische Zahlen

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/_k, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

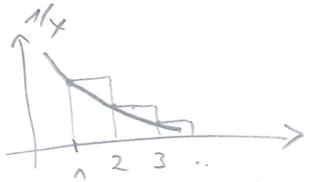
$$= \underbrace{1}_{\text{Gruppe 0}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}}_{\text{Gruppe 1}} + \underbrace{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}}_{\text{Gruppe 2}} + \ldots + 1/_n.$$

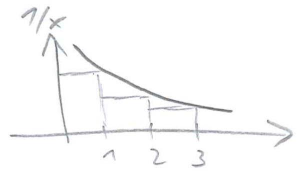
Gruppe i: $S_i := \sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} 1/_k$, $i \in \mathbb{N}_0$.

Klar: $1/_2 \leq S_i \leq 1$.

Falls n in der Gruppe i ist, dann $i/2 \le H_n \le i+1$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{2} \le H_n \le \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 .$$





$$H_n \ge \int_1^n 1/x \, dx = \ln n \qquad H_n \le 1 + \int_1^{n-1} 1/x \, dx = 1 + \ln(n-1).$$

Harmonische Zahl der Ordnung $r \in \mathbb{N}$:

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} k^{-r} \quad , \quad \zeta(r) = \sum_{k \ge 1} k^{-r} < \infty \text{ für } r \ge 2$$

<u>Satz 1.14</u> $\lim\limits_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = \gamma$, wobei

$$\gamma = 1 - \sum_{k \ge 2} \frac{1}{k} (\zeta(k) - 1) \approx 0.577.. \quad \text{(Euler-Masceroni)}$$

<u>Beweis.</u> Betrachte für $k \ge 2$

$$\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = -\ln(1 - 1/k) = \sum_{i \ge 1} \frac{1}{i} k^{-i} \quad \text{(Taylor von ln)}$$

Damit erhalten wir:

$$\ln n - \ln 1 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \sum_{i \ge 1} \frac{1}{i} k^{-i}$$

$$\overset{\text{(Fubini)}}{=} \sum_{i \ge 1} \frac{1}{i} \sum_{k=2}^{n} k^{-i}$$

$$= (H_n - 1) + \sum_{i \ge 2} \frac{1}{i} (H_n^{(i)} - 1).$$

<u>Daraus:</u> $H_n - \ln n = 1 - \sum\limits_{i \ge 2} 1/i \, (H_n^{(i)} - 1) =: 1 - S_n$

Die Summe konvergiert, da sie beschränkt ist ($H_n - \ln n \ge 0$) und die Terme alle ≥ 0 sind. Ferner ist $S_{n+1} \ge S_n \ge 0$ und mit monotoner Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i \ge 2} \frac{1}{i} \lim_{n\to\infty} (H_n^{(i)} - 1) = \sum_{i \ge 2} \frac{1}{i} (\zeta(i) - 1) \quad \blacksquare$$

<u>1.5. Bernulli-Zahlen</u>

$$S_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m \quad , \quad n, m \in \mathbb{N}_0 .$$

$$S_0(n) = n \quad , \quad S_1(n) = 1 + 2 + .. + (n-1) = \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n ,$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n .$$

Allg. Form? $\quad S_m(n) = \sum\limits_{i=0}^{m+1} \alpha_m(i) \cdot n^i$??

Die <u>Bernulli-Zahlen</u> sind gegeben als Lösung vom LGS

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = \mathbb{1}[m=0] , \quad m \in \mathbb{N}_0 .$$

<u>m=0</u> $\quad \binom{0+1}{0} B_0 = 1 \Rightarrow B_0 = 1$

<u>m=1</u> $\quad \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -1/2$

$B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$, $B_5 = 0$, $B_6 = 1/42$

Satz 1.15 $S_m(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \, n^{m+1-k}$. $(*)$.

Beweis: Induktion über m; $m=0$ ✓. Schritt $m-1 \to m$.

Betrachte dafür

$$S_{m+1}(n) + n^{m+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{m+1}$$

$$[\text{Binsatz}] \quad = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} k^j$$

$$= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \cdot S_j(n).$$

Sei $\hat{S}_m(n)$ die RS von $(*)$, wir möchten zeigen: $S_m(n) = \hat{S}_m(n)$, und nehmen an, dass $S_j(n) = \hat{S}_j(n)$ für $0 \leq j \leq m-1$. Sei $\Delta = S_m(n) - \hat{S}_m(n)$, dann:

$$n^{m+1} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} S_j(n) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} \hat{S}_j(n) + \binom{m+1}{m} \Delta$$

$$[\text{Def } \hat{S}] \quad = \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} \binom{j+1}{k} B_k \, n^{j-1+k} + (m+1)\Delta.$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq j \leq m} \binom{m+1}{j} \binom{j+1}{k} \frac{B_k}{j+1} n^{j-1+k} + (m+1)\Delta$$

$$[k \to j-k] \quad = \sum_{0 \leq k \leq j \leq m} \binom{m+1}{j} \binom{j+1}{j-k} \frac{B_{j-k}}{j+1} n^{k+1} + (m+1)\Delta$$

$$[\text{Sym}] \quad = \sum_{0 \leq k \leq j \leq m} \binom{m+1}{j} \binom{j+1}{k+1} \frac{B_{j-k}}{j+1} n^{k+1} + (m+1)\Delta$$

$$[\text{Abs.}] \quad = \sum_{k=0}^{m} \frac{n^{k+1}}{k+1} \sum_{j=k}^{m} \binom{m+1}{j} \binom{j}{k} B_{j-k} + (m+1)\Delta$$

Da $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}$ ist

$$n^{m+1} = \sum_{k=0}^{m} \frac{n^{k+1}}{k+1} \binom{m+1}{k} \sum_{j=k}^{m} \binom{m+1-k}{j-k} B_{j-k} + (m+1)\Delta$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{n^{k+1}}{k+1} \binom{m+1}{k} \cdot \sum_{j=0}^{m-k} \binom{m+1-k}{j} B_j + (m+1)\Delta$$

$$[\text{Def } B_n] = \frac{n^{m+1}}{m+1} \cdot \binom{m+1}{m} + (m+1)\Delta.$$

Daraus $\Delta = 0$. ✓ ∎