Diskrete Mathematik.

<u>Fokus</u>: Eigenschaften von endlichen | abzählbar unendlichen Mengen untersuchen.

→ Wieviele Objekte mit bestimmten Eigenschaften gibt es? [exakt, asymptotisch]

→ Graphentheorie – abstrakte Modelle für Netzwerke

→ Informationstheorie – Kodierung

→ Theoretische Informatik – Berechenbarkeit.

---

1. Aspekte der Kombinatorik

1.1 Fibonacci-Zahlen

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$ $[0,1,1,2,3,5,8,..]$

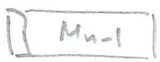
Ursprung: 450 v. Chr. in Indien. Viele Anwendungen!

Bsp. Betrachte $2 \times n$ Schachbrett. Wieviele Möglichkeiten gibt es, es mit 2×1 Dominosteinen vollständig zu belegen? $\to M_n$

$n=1$ 
$M_1 = 1 = F_2$

$n=2$ 
$M_2 = 2 = F_3$

$n=3$ 
$M_3 = 3 = F_4$.

Für $n \geq 4$: entweder 

oder 

,

d.h. $M_n = M_{n-1} + M_{n-2} \Rightarrow \underline{M_n = F_{n+1}}$

Satz 1.1 Sei $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$. Dann

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \hat{\varphi}^n\right), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

<u>Beweis</u>. Sei $S = \{(x_0, x_1, x_2, \ldots) : x_0, x_1 \in \mathbb{R}, x_i = x_{i-1} + x_{i-2}, i \geq 2\}$

Dann ist S ein Vektorraum:

(i) für $x, x' \in S$ ist

$$x + x' = (x_0 + x_0', x_1 + x_1', \ldots) =: (y_0, y_1, \ldots)$$

$$\Rightarrow y_i = x_i + x_i' = (x_{i-1} + x_{i-2}) + (x_{i-1}' + x_{i-2}')$$
$$= (x_{i-1} + x_{i-1}') + (x_{i-2} + x_{i-2}')$$
$$= y_{i-1} + y_{i-2} \quad \text{für } i \geq 2$$

und damit $x + x' \in S$.

(ii) für $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in S$ ist

$$\alpha x = (\alpha x_0, \alpha x_1, \alpha x_2, \ldots) =: (y_0, y_1, \ldots)$$

$$\Rightarrow y_i = \alpha x_i = \alpha(x_{i-1} + x_{i-2}) = y_{i-1} + y_{i-2} \quad \text{für } i \geq 2$$

und damit $\alpha x \in S$.

Ferner ist $\dim(S) = 2$, da S isomorph ist zu $\{(x_0, x_1) : x_0, x_1 \in \mathbb{R}\}$; sobald x_0, x_1 vorgegeben wurden, ist die gesamte Folge $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ festgelegt.

Basis? Sei $x_i = \alpha^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\alpha^i = \alpha^{i-1} + \alpha^{i-2} \Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$$
$$\Rightarrow \alpha \in \{\varphi, \hat{\varphi}\}$$

Betrachte
$$\Phi = (\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \ldots) \in S$$
$$\hat{\Phi} = (\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1, \hat{\varphi}^2, \ldots) \in S$$

Dann sind $\Phi, \hat{\Phi}$ lin. unabhängig:

$$\lambda \cdot \Phi + \hat{\lambda}\hat{\Phi} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda + \hat{\lambda} = 0 \\ \lambda\varphi + \hat{\lambda}\hat{\varphi} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \lambda = \hat{\lambda} = 0.$$

Somit ist $\{\Phi, \hat{\Phi}\}$ Basis von S und es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$F = \alpha \cdot \Phi + \beta \hat{\Phi} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha + \beta = F_0 = 0 \\ \alpha\varphi + \beta\hat{\varphi} = F_1 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = -\beta = 1/\sqrt{5}.$$

$$\Rightarrow F_n = \alpha\varphi^n + \beta \cdot \hat{\varphi}^n. \quad ∎$$

Aus Def: Fibonacci-Zahlen auch für <u>negative</u> n:

$$F_{n-2} = F_n - F_{n-1} \longrightarrow F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

z.B. $F_{-1} = F_1 - F_0 = 1$, $F_{-2} = F_0 - F_1 = -1$.

<u>Kor 1.2</u> Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann $F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n$.

<u>Beweis</u> Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. $n = 0, 1$ ✓. Schritt $n-1 \to n$.

$$F_{-n} = F_{-n+2} - F_{-n+1} = (-1)^{n-3} F_{n-2} - (-1)^{n-2} F_{n-1}$$
$$= (-1)^n (F_{n-2} - F_{n-1}) = (-1)^n F_n \checkmark. \quad ∎$$

<u>Lem 1.3</u> $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

<u>Beweis</u> $k = 0, 1$ ✓. Induktion $k-1 \to k$:

$$F_{n+k} = F_{n+(k-1)} + F_{n+(k-2)} \quad \text{(Definition)}$$
$$= (F_{k-1} F_{n+1} + F_{k-2} F_n) + (F_{k-2} F_{n+1} + F_{k-3} F_n) \quad \text{(IA)}$$
$$= F_k F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n.$$

Analog $k \to k-1$. ∎

Daraus erhalten wir:

$$F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} \cdot F_n = F_n (F_{n+1} + F_{n-1}),$$

also $F_n \mid F_{2n}$. Ähnlich: $F_n \mid F_{kn}$, $k \in \mathbb{N}$.

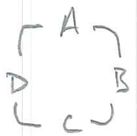
<u>Bsp.</u> $F_3 \mid F_{15}$, $F_5 \mid F_{15}$. Sogar mehr:

<u>Satz 1.4</u> $ggT(F_n, F_m) = F_{ggT(n,m)}$. $n, m \in \mathbb{N}$.

<u>Bew.</u> Übung! ∎

1.2. Stirling-Zahlen

<u>Stirling Zahlen 1. Art</u> Ein <u>Zyklus</u> von n Elementen ist eine zyklische Permutation



$[A,B,C,D] = [B,C,D,A] = [C,D,A,B] = [D,A,B,C]$

$\neq [A,C,D,B]$

Es gibt $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ Zyklen einer n-elem. Menge.

$\bar{S}_{n,k}$ = # Möglichkeiten eine n-elem. Menge in k Zyklen zu partitionieren. $\bar{S}_{n,0} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

<u>Bsp</u> $n = 4, k = 2$. [123][4], [124][3], [134][2], [234][1]
[132][4], [142][3], [143][2], [243][1]
[12][34], [13][24], [14][23]

$\bar{S}_{4,2} = 11.$

Eigenschaften: 1) $\bar{S}_{n,1} = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $\bar{S}_{n,n} = 1$, da jedes Element ein Zyklus.

3) $\bar{S}_{n,n-1} = \binom{n}{2}$, da genau ein Zyklus mit 2 Elementen.

Satz 1.5 $\bar{S}_{n,k} = (n-1)\bar{S}_{n-1,k} + \bar{S}_{n-1,k-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$.

Beweis. (Kombinatorisch) Es gibt zwei Möglichkeiten:

1) $[n]$ ist Zyklus $\rightarrow$ $\bar{S}_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten, die restlichen $n-1$ Elemente auf $k-1$ Zyklen zu verteilen.

2) Sonst: betrachte Partition von $1,\dots,n-1$ in k Zyklen:

$\{z_1,\dots,z_k\}$ mit $z_i = [z_{i,1},\dots z_{i,l_i}]$

mit $l_i \geq 1$ für $1 \leq i \leq k$, und $l_1 + \dots + l_k = n-1$. Für z_i gibt es l_i Möglichkeiten das Element n einzufügen um einen Zyklus der Länge l_i+1 zu erhalten.

$\Rightarrow$ insgesamt $\sum_{i=1}^{k} l_i = n-1$ Möglichkeiten. ∎

Kor 1.6 $\sum_{k=0}^{n} \bar{S}_{n,k} = n!$

Beweis. Jede Permutation π hat eine bestimmte Anzahl Zyklen in $\{1,\dots,n\}$. ∎

Betrachte für $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$

$x^{\underline{k}} = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1)$ "Fallende Faktorielle"

$x^{\overline{k}} = x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+k-1)$ "Steigende Faktorielle"

z.B. $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$.

Stirling Zahlen 2. Art

$S_{n,k} = \#$ Möglichkeiten, eine n-elementige Menge in k (nicht-leere) Teilmengen zu partitionieren

Wie vorher: $S_{n,0} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Eigenschaften: 1) $S_{n,1} = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{N} \\ 0, & n=0 \end{cases}$

2) $S_{0,2} = S_{1,2} = 0$. Es gibt 2^n Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$, davon ist eine leer, eine andere alles.

Damit: $S_{n,2} = (2^n-2)/2 = 2^{n-1}-1$.

Satz 1.7 Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann:

$S_{n,k} = k \cdot S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1}$, $k \geq 1$

$S_{n,k} = 0$ für $k \leq 0$ oder $k > n$.

Beweis. (Kombinatorisch) Es gibt zwei Möglichkeiten:

1) $\{n\}$ ist einer der k Teile $\rightarrow$ $S_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten, die restlichen $n-1$ Elemente in $k-1$ Teile

2) Sonst: n ist in einem der k Teile von $\{1,\dots,n-1\}$ enthalten $\rightarrow$ $k \cdot S_{n-1,k}$ Mögl. ∎

Lem 1.8 Für $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} S_{k,n} \cdot x^{\underline{k}} \quad (!)$$