Sommersemester 2016

Diskrete Mathematik

Übungsblatt 5

Prof. K. Panagiotou/K. Matzke

Die Aufgaben werden in der Übung am 20.05. besprochen.

Aufgabe 1

Aus der Analysis wissen wir, dass $\sum_{k\geq 1} k^{-2} = \pi^2/6$. Zeigen Sie mit Euler Summation, dass für $n \to \infty$

$$H_n^{(2)} = \sum_{1\leq k\leq n} k^{-2} = \pi^2/6 - n^{-1} + O(n^{-2}).$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$

$$e^{H_n + H_n^{(2)}} = n\, e^{\gamma+\pi^2/6} \left(1 - n^{-1}/2 + O(n^{-2})\right).$$

Aufgabe 3

Finden Sie eine Funktion $f(n)$, so dass für $n \to \infty$

$$\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{kH_k} = f(n) + O(1).$$

Hinweis: überlegen Sie sich zuerst, dass $\frac{1}{k(\ln k + O(1))} = \frac{1}{k\ln k} + O(\frac{1}{k(\ln k)^2})$.

Aufgabe 4

Finden Sie eine Funktion $f(n)$, so dass für $n \to \infty$

$$\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{n^2 + k} = f(n) + O(n^{-6}).$$

Hinweis: aus der Vorlesung wissen wir, dass H_n sehr genau approximiert werden kann.

Aufgabe 5

Zeigen Sie für $n \to \infty$

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\sqrt{n + 2^k}}{k!} = \sqrt{n}(e + e^2/(2n)) + O(n^{-3/2}).$$

Um die Aussage zu beweisen, argumentieren Sie zunächst dass für $k = o(\ln n)$

$$\sqrt{n + 2^k} = \sqrt{n}\,(1 + 2^{k-1}n^{-1} + O(2^{2k}n^{-2})).$$