Computergestützte Mathematik

Aufgabe 9.1: Rechnen

a) Berechnen Sie $|\pi^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{\pi}|$ mit 12-stelliger Ausgabegenauigkeit.

b) Berechnen Sie $\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$ für $n = 10, 100, 1000$.

c) Berechnen Sie für $k = 0, \ldots, n$ die Binomialwahrscheinlichkeiten als Vektor $\mathbf{b}$ mit

$$b_k := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

für $n = 20$ und $p = 0.3$.
Machen Sie anschließend die Probe mit `dbinom`.

Aufgabe 9.2: Illustration zum Gesetz der großen Zahl

Erzeugen Sie mit `runif` einen Vektor $\mathbf{r}$ der Länge $N = 1000$ mit zufälligen gleichverteilten Einträgen aus $(0, 1)$. Berechnen Sie den Vektor

$$\bar{r}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i \quad \text{für } n = 1 \ldots N,$$

und plotten Sie dieses laufende Mittel $\bar{r}_n$ gegen n.

Aufgabe 9.3: Korrelation

a) Erzeugen Sie zwei Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ mit je $N = 500$ zufälligen gleichverteilten Einträgen aus dem Intervall $(-1, 1)$. Plotten Sie die Paare (x_i, y_i) als Streudiagramm („Punktwolke").

b) Selektieren Sie alle Einträge aus $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, die die Bedingung $x_i^2 + y_i^2 + x_i y_i < 1$ erfüllen. Speichern Sie diese in den Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ und plotten Sie (u_i, v_i) als Streudiagramm.

c) In unserem Fall ist der Mittelwert der x_i, y_i, u_i, v_i ungefähr gleich 0. Daher gilt für den empirischen Korrelationskoeffizienten von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$

$$r_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}}$$

und analog für $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$. Berechnen Sie $r_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ und $r_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$.