

## Computergestützte Mathematik

### Aufgabe 8.1: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Gegeben seien

$$v := \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, S := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:  $Av$ ,  $SA - AS$ ,  $\det(A - 5I)$ ,  $w^t Sw$  und  $S^{-1}AS$ .

### Aufgabe 8.2: Rang, Kern und Bild

Wir betrachten die folgende reelle  $4 \times 4$ -Matrix  $A$  mit Parameter  $a$ :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & a & 3 \\ -4 & 3 & 2 & a+1 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist  $A$  invertierbar? (*Hinweis*: Determinante.)
- Bestimmen Sie für  $a = 1$  den Rang und eine Basis des Spaltenraums von  $A$ . Bestimmen Sie weiter eine Basis des Kerns der von  $A$  induzierten linearen Abbildung.
- Berechnen Sie für  $a = -\frac{34}{5}$  die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  mit  $b = (3, 4, -1, 6)^t$  und machen Sie die Probe durch Einsetzen.

### Aufgabe 8.3: Eigenwerte und Normalformen

Gegeben sei eine reelle  $3 \times 3$ -Matrix  $M$  der Gestalt

$$M := \begin{pmatrix} a & c & c \\ b & a & c \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

- Im Fall  $b = c$  ist  $M$  symmetrisch, also orthogonal diagonalisierbar. Bestimmen Sie in diesem Fall eine *Orthonormalbasis* aus Eigenvektoren von  $M$ .
- Im Fall  $c = 0$  ist  $M$  i. Allg. nicht diagonalisierbar. Bestimmen Sie in diesem Fall die Jordan-Normalform von  $M$ . Ist das Ergebnis, das Maple liefert, stets korrekt?