

Computergestützte Mathematik

Maple-Aufgabe 7.1: Einfache Analysis-Befehle

Berechnen Sie mit Maple:

- die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2+5}$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(\sin(x)) - \sin(\sinh(x))}{x^7}$,
- die durch die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ dargestellte Funktion,
- die Nullstellen der 1. bzw. 2. Ableitung von $f(x) = xe^{-x^2/2}$,
- den Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 4} dx$ symbolisch und als Dezimalzahl mit 20 Nachkommastellen.

Aufgabe 7.2: Mehrdimensionale Probleme

- Plotten Sie mit dem Befehl `plot3d` den Graph der Funktion $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ zusammen mit der Tangentialebene, die ihn an der Stelle $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ berührt. Beachten Sie dazu, dass man die Gleichung der Tangentialebene durch Taylor-Entwicklung bis einschließlich der Glieder 1. Ordnung erhält.
- Zeigen Sie, dass das Vektorfeld (Gravitationsfeld einer Punktmasse)

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

divergenzfrei und rotationsfrei ist. Verwenden Sie dazu die entsprechenden Befehle aus dem Package `VectorCalculus`.

- Seien $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ und $g(x, y, z) = x + 2y + 3z - 7$. Berechnen Sie die Stelle, an der $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$ ein Extremum annimmt. *Hinweis:* Nach dem Satz über Extrema mit Nebenbedingungen erhält man die gesuchte Stelle als die gemeinsame Nullstelle der vier partiellen Ableitungen der *Lagrange-Funktion* $L := f + \lambda g$ nach x, y, z und λ .
- Nach der Transformationsformel für Gebietsintegrale gilt für die Integration über den Einheitskreis

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Überprüfen Sie diese Formel an einem Beispiel, indem Sie für $f(x, y) = x^2 + y^4$ beide Seiten ausrechnen.