Mathematisches Institut
der Universität München
K. Keilhofer

WiSe 2019/20
– Blatt 4 –
12.11.2019

Computergestützte Mathematik

Aufgabe 4.1: Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme
Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, das für $n = 50$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad v = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \sin(2) \\ \sin(3) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad b = Av$$

erzeugt. Versuchen Sie dabei ohne Laufschleifen auszukommen (*Hinweis*: `tril`-Befehl).
Lösen Sie anschließend mit diesen Daten auf dreierlei Weise das Gleichungssystem $Ax = b$:

i) mit dem \-Operator,
ii) durch Berechnung einer LR-Zerlegung $A = LR_1$ und Lösung der Dreieckssysteme $Ly = b$, $R_1x = y$ mit \,
iii) durch Berechnung einer QR-Zerlegung $A = QR_2$ und Lösung des Dreieckssystems $R_2x = Q^{\mathsf{t}}b$ mit \.

Geben Sie jeweils nur den relativen Fehler $\|x-v\|_2/\|v\|_2$ zur wahren Lösung v in der $\|\cdot\|_2$-Norm aus. Was ist zu beobachten? Berechnen Sie anschließend die $\|\cdot\|_2$-Konditionszahlen der Matrizen A, L, R_1 und R_2.

Aufgabe 4.2: QR-Verfahren
Man kann die Eigenwerte einer symmetrischen $n \times n$-Tridiagonalmatrix $A = (a_{ij})$ zum Beispiel mit Hilfe des sogenannten *QR-Verfahrens* berechnen. Das geht für den kleinsten Eigenwert so:

Wähle ein kleines $\varepsilon > 0$ und setze $A^{(0)} := A$;
Wiederhole für $k = 0, 1, \dots$, solange $|a^{(k)}_{n,n-1}| > \varepsilon$ ist:
    Berechne eine QR-Zerlegung $A^{(k)} = Q^{(k)}R^{(k)}$;
    Setze $A^{(k+1)} := R^{(k)}Q^{(k)}$;
Ergebnis: Bricht das Verfahren beim K-ten Schritt ab, dann ist $a^{(K)}_{n,n}$ eine Näherung an den kleinsten Eigenwert.

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `lambda = qriter(A,epsilon)`, die mit diesem Verfahren einen Eigenwert einer symmetrischen Tridiagonalmatrix berechnet. Beachten Sie, dass Sie den Index k im Programm gar nicht benötigen! Testen Sie die Funktion mit $\varepsilon = 10^{-12}$ an der symmetrischen Tridiagonalmatrix (vgl. auch `help diag`).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 49 & 1 \\ 0 & & & & 1 & 50 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{50\times 50}.$$