Lösungsvorschlag Tutoriumsblatt 2

1. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011)*
Im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \ \ c_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \ c_2 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und c_1, c_2 eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ sei die lineare Abbildung $f_P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch die Matrix

$$P = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

gegeben. Bestimmen Sie die darstellende Matrix P' für f_P bezüglich der Basen aus a).

Lösung:

a) Die Matrix $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

invertierbar, weswegen b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Ferner ist die Matrix $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen

$$\det(C) = \begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

invertierbar, weswegen c_1, c_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

b) Die lineare Abbildung $f_P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ besitzt bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ die darstellende Matrix

$$P = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$

es ist also $f_P(x) = P \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Für die darstellende Matrix $P' \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ von f_P bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ und c_1, c_2 von $\mathbb{R}^2$ ergibt sich gemäß dem Basiswechsel

$$P' = C^{-1} \cdot P \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -15 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

2. Im $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und w_1, w_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, und bestimme die darstellende Matrix A' von $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser beiden Basen.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix A'' von $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der beiden Basen aus Aufgabe 1.

c) Gegeben sei die in Teilaufgabe a) berechnete darstellende Matrix A' bezüglich der beiden Basen v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2. Bestimmen Sie noch einmal die darstellende Matrix A'' von $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der beiden Basen aus Aufgabe 1. Verwenden Sie nun die Formel für den Basiswechsel (7.28) und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Teilaufgabe b)

Hinweis:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Mit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\det(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} 3 - 4 = -1.$$

Damit ist $\mathcal{B}$ invertierbar, insbesondere ist also v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Für $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ gilt

$$\det(\mathcal{C}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Damit ist $\mathcal{C}$ invertierbar mit

$$\mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist w_1, w_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Für die darstellende Matrix A' von $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser beiden Basen gilt demnach

$$A' = \mathcal{C}^{-1} A \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 18 & 4 \\ 17 & 23 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Für die darstellende Matrix A'' von $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der beiden Basen aus Aufgabe 1 gilt unter Verwendung der Notation aus Aufgabe 1

$$A'' = C^{-1} A B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 31 & 56 \\ 4 & 13 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 23 & 43 \\ -1 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

c) Für die darstellende Matrix A'' von $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der beiden Basen aus Aufgabe 1 gilt ebenfalls unter Verwendung der Notation aus Aufgabe 1

$$A'' = C^{-1} A B = C^{-1} \mathcal{C} (\mathcal{C}^{-1} A \mathcal{B}) \mathcal{B}^{-1} B = C^{-1} \mathcal{C} A' \mathcal{B}^{-1} B$$

Gemäß dem Hinweis gilt

$$\mathcal{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A'' = C^{-1} \mathcal{C} A' \mathcal{B}^{-1} B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 23 & 43 \\ -1 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe b) überein!

3. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012)*

Sei π die lineare Abbildung

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\,x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $v \in \mathbb{R}^3$ ist $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$.

b) $\operatorname{Kern}(\pi) \cap \operatorname{Bild}(\pi) = \{0\}$.

c) $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Kern}(\pi) + \operatorname{Bild}(\pi)$.

Lösung:

a) Für alle $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\pi(v) = \pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\pi(\pi(v)) &= \pi \begin{pmatrix} 2\,x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,(2\,x - y - z) - (x - z) - (x - y) \\ (2\,x - y - z) - (x - y) \\ (2\,x - y - z) - (x - z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4\,x - 2\,y - 2\,z - x + z - x + y \\ 2\,x - y - z - x + y \\ 2\,x - y - z - x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix} = \pi(v).
\end{aligned}$$

b) Für jedes $w \in \operatorname{Kern}(\pi) \cap \operatorname{Bild}(\pi)$ gilt

- zum einen $w \in \operatorname{Kern}(\pi)$, also $\pi(w) = 0$, und
- zum anderen $w \in \operatorname{Bild}(\pi)$, also $w = \pi(v)$ für ein $v \in \mathbb{R}^3$;

damit ergibt sich zusammen

$$w \underset{w \in \operatorname{Bild}(\pi)}{=} \pi(v) \underset{\text{a)}}{=} \pi(\pi(v)) = \pi(w) \underset{w \in \operatorname{Kern}(\pi)}{=} 0,$$

also $\operatorname{Kern}(\pi) \cap \operatorname{Bild}(\pi) = \{0\}$.

c) Wegen $\operatorname{Kern}(\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\operatorname{Bild}(\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$ ist auch $\operatorname{Kern}(\pi) + \operatorname{Bild}(\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$; mit der Dimensionsformel für Unterräume ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
&\dim\left(\operatorname{Kern}(\pi) + \operatorname{Bild}(\pi)\right) = \\
&\qquad = \dim \operatorname{Kern}(\pi) + \dim \operatorname{Bild}(\pi) - \dim \underbrace{\left(\operatorname{Kern}(\pi) \cap \operatorname{Bild}(\pi)\right)}_{=\{0\}\text{ gemäß b)}} = \\
&\qquad\qquad = \dim \operatorname{Kern}(\pi) + \dim \operatorname{Bild}(\pi),
\end{aligned}$$

woraus mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen dann

$$\dim\left(\operatorname{Kern}(\pi) + \operatorname{Bild}(\pi)\right) = \dim \operatorname{Kern}(\pi) + \dim \operatorname{Bild}(\pi) = \dim \mathbb{R}^3$$

und damit insgesamt $\operatorname{Kern}(\pi) + \operatorname{Bild}(\pi) = \mathbb{R}^3$ folgt.

4. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}), \quad p(X) \mapsto p(X+1) - p(X).$$

a) Man bestimme die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis 1, X, X^2, X^3 von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.

b) Man entscheide, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

a) Für ein Polynom

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$

ist

$$p(X+1) = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 + a_3(X+1)^3 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R});$$

die Unbestimmte X wird also durch $X+1$ ersetzt; für die lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}), \quad p(X) \mapsto p(X+1) - p(X),$$

ergibt sich damit für $p(X) = 1$, also mit $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, dann

$$f(1) = 1 - 1 = 0,$$

für $p(X) = X$, also mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, dann

$$f(X) = (X+1) - X = 1,$$

für $p(X) = X^2$, also mit $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, dann

$$f(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$$

und für $p(X) = X^3$, also $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, dann

$$f(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\
f(X) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\
f(X^2) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\
f(X^3) &= 1 \cdot 1 + 3 \cdot X + 3 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3
\end{aligned}$$

ergibt sich damit für die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis 1, X, X^2, X^3 damit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

b) Für das konstante Polynom 1 gilt gemäß a) $f(1) = 0$, für das Nullpolynom 0 gilt ebenfalls $f(0) = 0$; wegen $f(0) = f(1)$ mit $0 \neq 1$ ist f nicht injektiv. Damit kann f als Endomorphismus des endlich–dimensionalen Vektorraums $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ auch nicht surjektiv sein; insbesondere ist f nicht bijektiv.

Alternativ kann die Aufgabe auch mit Hilfe von Satz 7.31 gelöst werden. Dieser Satz besagt, dass f genau dann injektiv, surjektiv oder bijektiv ist, In Satz 7.31 wurde gezeigt, dass f genau dann injektiv, surjektiv oder bijektiv ist, wenn l_M injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Da M in Zeilenstufenform vorliegt, kann direkt abgelesen werden, dass $\mathrm{Rang}(M) = 3 < 4$ ist. Damit ist $\dim(\mathrm{Kern}(M)) = 1$. Somit ist l_M und damit auch f nicht injektiv. Da f des Weiteren ein Endomorphismus ist, gilt ebenfalls f surjektiv $\Leftrightarrow$ f injektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv. Somit ist f auch nicht injektiv und nicht bijektiv.