LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Andreas Rosenschon
Thomas Jahn

Sommersemester 2013
25. Juni 2013[1]

Höhere Algebra – Übungsblatt 10

Aufgabe 1 ($\mathfrak{m}$-primär).
Sei $A = \mathbb{Z}[x]$ der Polynomring. Zeigen Sie: Das Ideal $\mathfrak{m} = (2, x)$ ist maximal und das Ideal $\mathfrak{q} = (4, x)$ ist $\mathfrak{m}$-primär, aber $\mathfrak{q}$ ist keine Potenz von $\mathfrak{m}$.

Aufgabe 2 (Primärideale im Polynomring).
Sei k ein Körper und $k[x_1, x_2, x_3]$ der Polynomring in drei Variablen über k. Wir betrachten die Primideale $\mathfrak{p}_1 = (x_1, x_2)$, $\mathfrak{p}_2 = (x_1, x_3)$ sowie das maximale Ideal $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, x_3)$ und setzen $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$ eine minimale Primärzerlegung ist.

(ii) Bestimmen Sie die minimalen bzw. die eingebetteten assoziierten Primideale des Ideals $\mathfrak{a}$.

Aufgabe 3 (Funktionen auf Hausdorffräumen).
Sei X ein unendlicher kompakter Hausdorffraum und $A = C(X)$ der Ring der reellwertigen stetigen Funktionen auf X. Zeigen Sie, dass sich das Nullideal in A nicht als Schnitt endlich vieler Primärideale darstellen lässt.

Aufgabe 4 (Primärideale und Lokalisierung).
Sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge eines Rings A. Zeigen Sie:

(i) Die Zuordnung $\mathfrak{a} \to S^{-1}\mathfrak{a}$ induziert eine Bijektion zwischen den Primäridealen $\mathfrak{q}$ von A mit $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ und den Primäridealen von $S^{-1}A$.

(ii) Sei nun zudem A noethersch. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i$ und sei $\mathfrak{p}_i = r(\mathfrak{q}_i)$. Die $\mathfrak{q}_i$ seien so angeordnet, dass $\mathfrak{p}_i \cap S = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, m$ und $\mathfrak{p}_i \cap S \neq \emptyset$ für $i = m+1, \cdots, r$ gilt. Dann sind die Zerlegungen

$$S^{-1}\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}\mathfrak{q}_i \quad \text{und} \quad (S^{-1}\mathfrak{a})^c = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{q}_i$$

minimale Primärzerlegungen.

[1] Aufgabe 3 am 3. Juli korrigiert: $C(X)$ ist der Ring der reellwertigen *stetigen* Funktionen.

Abgabe bis einschließlich 2. Juli 2013 im Übungskasten (in der Nähe der Bibliothek). Bitte geben Sie Ihren Namen gut lesbar an.