LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Andreas Rosenschon
Thomas Jahn

Sommersemester 2013
10. Juni 2013[1]

Höhere Algebra – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (Adjungierte Funktoren).
Sei $\mathfrak{A}$ wie in Aufgabe 4 von Übungsblatt 7 eine der folgenden Kategorien:

1. A-$\mathfrak{Mod}$, die Kategorie der A-Moduln
2. $\mathfrak{Ab}$, die Kategorie der abelschen Gruppen
3. $\mathfrak{Ring}$, die Kategorie der (kommutativen) Ringe
4. k-$\mathfrak{VR}$, die Kategorie der k-Vektorräume

Sei $\mathfrak{B}$ eine weitere Kategorie aus dieser Liste und sei $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein Funktor.

(i) Zeigen Sie: F ist genau dann linksexakt (bzw. rechtsexakt), wenn $\ker(F(\varphi)) = F(\ker(\varphi))$ (bzw. $\operatorname{coker}(F(\varphi)) = F(\operatorname{coker}(\varphi))$) für jeden Morphismus φ in $\mathfrak{A}$ gilt.

Seien $L : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ und $R : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ zwei adjungierte Funktoren, d.h.

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{B}}(L(X), Y) \cong \mathrm{Mor}_{\mathfrak{A}}(X, R(Y)) \tag{1}$$

für alle Objekte X in $\mathfrak{A}$ und Y in $\mathfrak{B}$.

(ii) Zeigen Sie, dass R linksexakt ist. Sei dazu $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ eine exakte Sequenz in $\mathfrak{B}$. Und $\varphi : D \to R(B)$ ein Morphismus in $\mathfrak{A}$ derart, dass $R(g) \circ \varphi = 0$ ist. Übertragung der Situation mittels (1) liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\
 & & L(D) \arrow[u] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

in der Kategorie $\mathfrak{B}$. Zeigen Sie, dass der Morphismus $L(D) \to B$ durch A faktorisiert. Übersetzen Sie dieses Diagramm mittels (1) zurück in die Kategorie $\mathfrak{A}$ und zeigen Sie damit, das R linksexakt ist.

(iii) Zeigen Sie, dass L rechtsexakt ist.

[1] Korrigiert am 11. Juni.

Aufgabe 2 (Artin'sch und Noether'sch).
Zeigen Sie:

(i) Für einen k-Vektorraum V sind folgende Aussagen äquivalent:

  a) Die Vektorraumdimension $\dim_k V$ ist endlich.

  b) Jede Kette $\cdots \subsetneq V_i \subsetneq V_{i+1} \subsetneq \cdots$ von k-Untermoduln $V_i \subseteq V$ ist endlich.

  c) Der k-Modul V ist noethersch.

  d) Der k-Modul V ist artinsch.

(ii) Folgern Sie: Ist A ein Ring, dessen Nullideal sich als Produkt $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ von (nicht notwendigerweise verschiedenen) maximalen Idealen $\mathfrak{m}_i \subseteq A$ schreiben lässt, so ist A genau dann noethersch, wenn er artinsch ist.

Aufgabe 3 (Noethersche Ringe und noethersche Räume).

(i) Zeigen Sie: Ist A ein noetherscher Ring, so ist $\operatorname{Spec}(A)$ ein noetherscher topologischer Raum.

(ii) Sei $B = k[x_1, x_2, \ldots]$ der Polynomring in abzählbar unendlich vielen Variablen über einem Körper k. Wir betrachten das Ideal $\mathfrak{a} = (x_1, x_2^2, x_3^3, \ldots)$ in B und setzen $A = B/\mathfrak{a}$. Nutzen Sie das Ideal $\mathfrak{b} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ in B, um zu zeigen, dass $\operatorname{Spec}(A)$ aus genau einem Punkt besteht und damit noethersch ist. Zeigen Sie weiter, dass A nicht noethersch ist.

Aufgabe 4 (0-dimensionale affine k-Algebren).
Sei $A \neq 0$ eine affine k-Algebra. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Der Ring A hat Dimension 0.

b) A ist algebraisch über k.

c) Der k-Vektorraum A hat endliche Dimension über k.

d) Der Ring A ist artinsch.

e) Das Maximalspektrum $\operatorname{Spec}_{\max}(A)$ ist endlich.

Abgabe bis einschließlich 18. Juni 2013 im Übungskasten (in der Nähe der Bibliothek). Bitte geben Sie Ihren Namen gut lesbar an.