LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Andreas Rosenschon
Thomas Jahn

Sommersemester 2013
13. Mai 2013

Höhere Algebra – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (Irreduzibelität).
Zeigen Sie: Eine affine algebraische k-Varietät $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\mathcal{I}(V) \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Primideal ist.

Aufgabe 2 (Varietäten in der Ebene).
Sei k ein Körper. Zeigen Sie:

(i) Sind $f, g \in k[X, Y]$ Polynome die keinen gemeinsamen Faktor haben, so ist $V = \mathcal{V}(f, g) = \mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(g)$ eine endliche Menge.

(Tipp: Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(f, g)$ *eine Einheit in* $k(X)[Y]$ *ist und folgern Sie mit dem Lemma von Bézout, dass es* $d \in k[X]$ *und* $a, b \in k[X, Y]$ *mit* $af + bg = d$ *gibt. Folgern Sie, dass die Anzahl der* P_X *mit* $(P_X, P_Y) \in V$ *endlich ist und beenden Sie dann den Beweis.)*

(ii) Ist $f \in k[X, Y]$ irreduzibel und $\mathcal{V}(f)$ unendlich, so ist $\mathcal{I}(\mathcal{V}(f)) = (f)$ und $\mathcal{V}(f)$ irreduzibel.

Aufgabe 3 (Eindeutige Zerlegung in irreduzible Komponenten).
Sei $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ eine affine algebraische k-Varietät.

Zeigen Sie: Es gibt eindeutige irreduzible k-Varietäten $V_1, \ldots, V_m$ mit $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$ und $V_i \not\subseteq V_j$ für alle $i \neq j$.

Diese eindeutigen V_i werden als *irreduzible Komponenten* von V bezeichnet.

Aufgabe 4 (Beispiele).

(i) Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Zeigen Sie, dass $V = \mathcal{V}(\{X_1^3 - X_1 - X_2^2\})$ irreduzibel ist.

(Für $K = \mathbb{R}$ *ist* V *das* V_e *von Übungsblatt 3. Vergleichen Sie die Aussage dieser Aufgaben mit der graphischen Darstellung von* V_e*.)*

(ii) Bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten der affinen $\mathbb{C}$-Varietät

$$W = \mathcal{V}_{\mathbb{C}^2}((Y^2 - XY - X^2Y + X^3)) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 .$$

Abgabe bis einschließlich 22. Mai 2013 im Übungskasten (in der Nähe der Bibliothek). Bitte geben Sie Ihren Namen gut lesbar an.