LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

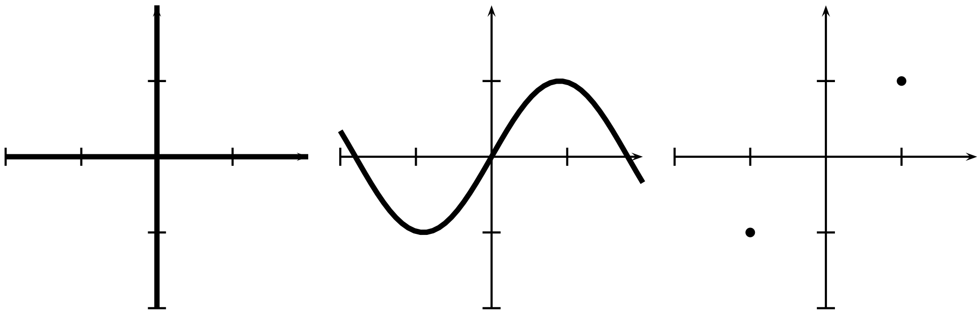
Prof. Dr. Andreas Rosenschon
Thomas Jahn

Sommersemester 2013
6. Mai 2013[1]

Höhere Algebra – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (Beispiele von Varietäten).

(i) Versuchen Sie für folgende Teilmengen des $V_\bullet \subseteq \mathbb{R}^2$ Teilmengen $S_\bullet \subseteq \mathbb{R}[X_1, X_2]$ derart zu finden, dass $V_\bullet = \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(S_\bullet)$ gilt.



(a) V_a ist das Achsenkreuz

(b) V_b ist der Graph von $x \mapsto \sin(x)$

(c) V_c besteht genau aus den Punkten $(-1, -1)$ und $(1, 1)$

(ii) Bestimmen und zeichnen Sie nun umgekehrt $V_\bullet = \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(S_\bullet)$ für folgende $S_\bullet$:

(d) $S_d = \{X_1^2 - X_2, X_1^2 + X_2^2 - 1\}$.

(e) $S_e = \{X_1^3 - X_1 - X_2^2\}$.

(f) $S_f = \{X_2^4 + 2X_1^2X_2^2 + X_1^4 - 4X_1^2\}$.

Aufgabe 2 (Kardinalität von Hyperflächen).
Sei $k = \overline{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ eine k-Hyperfläche, d.h. $V = \mathcal{V}_{k^n}(\{f\})$ für ein nichtkonstantes Polynom $0 \neq f \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie:

(i) Ist $n \geq 1$, so ist die Kardinalität von $\mathbb{A}_k^n \backslash V$ unendlich.

(ii) Für jede k-Varietät $W \subseteq \mathbb{A}_k^n$ ist die Kardinalität von $\mathbb{A}_k^n \backslash W$ unendlich.

(iii) Ist $n \geq 2$, so ist die Kardinalität von V unendlich.

Aufgabe 3 (Lemma 2.7).
Beweisen Sie Lemma 2.7 der Vorlesung: Ist A ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, so ist

[1] 7. Mai: Konvention hinzugefügt; 10. Mai: Definition „Hyperebene“ nachgebessert

das Radikalideal $r(\mathfrak{a})$ der Schnitt über alle Ideale $\mathfrak{p}$ im Rabinowitschspektrum, die $\mathfrak{a}$ enthalten:

$$r(\mathfrak{a}) = \bigcap\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{rab}}(A),\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

(Konvention: Wenn es kein Primideal im Rabinowitschspektrum gibt das $\mathfrak{a}$ enthält, d.eh. wenn die rechte Seite der Schnitt über die leere Menge ist, so ist der Schnitt der ganze Ring A.)

(i) Zeigen Sie dazu zunächst die Inklusion „$\subseteq$“.

(ii) Für die Inklusion „$\supseteq$“ sei a im Schnitt aller Ideale im Rabinowitschspektrum, die $\mathfrak{a}$ enthalten. Zeigen Sie: Es gibt $g, g_1, \ldots, g_n \in A[X]$ und $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{a}$ mit

$$1 = \sum_{j=1}^{n} g_j b_j + g(aX - 1).$$

(Betrachten Sie z.B. das von den Elementen aus $\mathfrak{a}$ und $aX - 1$ erzeugte Ideal in $\mathfrak{b} \subseteq A[X]$ und führen Sie die Aussage $\mathfrak{b} \subsetneq A[X]$ zu einem Widerspruch.)

(iii) Wenden Sie $\varphi : A[X] \to A[X, X^{-1}], f \mapsto f(X^{-1})$ auf beide Seiten der Gleichung an und multiplizieren Sie beide Seiten mit X^k, wobei k größer ist, als der Grad der g_i und g. Begründen Sie, warum Sie in der entstandenen Gleichung

$$X^k = \sum_{j=1}^{n} X^k \varphi(g_j) b_j + X^{k-1} \varphi(g)(a - X)$$

X durch a substituieren können und beweisen Sie das Lemma.

Aufgabe 4 (Jacobsonringe).
Zeigen Sie:

(i) Der Ring $\mathbb{Z}$ ist ein Jacobsonring.

(ii) Jede affine k-Algebra A ist ein Jacobsonring.

Abgabe bis einschließlich 14. Mai 2013 im Übungskasten (in der Nähe der Bibliothek). Bitte geben Sie Ihren Namen gut lesbar an.