LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Andreas Rosenschon
Thomas Jahn

Sommersemester 2013
22. April 2013

Höhere Algebra – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Radikal eines Ideals).
Sei A ein Ring, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ Ideale. Wir bezeichnen mit $r(\mathfrak{a})$ das Radikal des Ideals $\mathfrak{a}$. Zeigen Sie:

(i) $\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$.

(ii) $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$.

(iii) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$.

(iv) $r(\mathfrak{a}) = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (1)$.

(v) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$.

(vi) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so ist $r(\mathfrak{p}^n) = r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ für alle $n > 0$.

Aufgabe 2 (Polynomring).
Sei A ein Ring. Betrachten Sie $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[x]$. Zeigen Sie:

(i) f ist genau dann Einheit in $A[x]$, wenn a_0 Einheit in A ist und $a_1, \ldots, a_n$ nilpotent sind.

(ii) Ist f nilpotent, so sind die $a_0, \ldots, a_n$ ebenfalls nilpotent.

(iii) f ist Nullteiler genau dann, wenn es ein $0 \neq a \in A$ gibt, sodass $af = 0$.

Aufgabe 3 (Potenzreihenring).
Sei A ein Ring und $A[\![x]\!]$ der Ring der formalen Potenzreihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit Koeffizienten a_i in A. Zeigen Sie:

(i) f ist genau dann Einheit in $A[\![x]\!]$, wenn a_0 Einheit in A ist.

(ii) Ist f nilpotent, so ist für alle $n \geq 0$ der Koeffizient a_n nilpotent.

(iii) f liegt genau dann im Jacobsonradikal von $A[\![x]\!]$, wenn a_0 im Jacobsonradikal von A liegt. (Das Jacobsonradikal eines Ringes ist definiert als der Schnitt aller maximalen Ideale des Rings.)

Aufgabe 4 (Menge der Primideale).
Sei $A \neq 0$ ein Ring. Zeigen Sie, dass die Menge der Primideale von A bzgl. Inklusion ein minimales Element besitzt.

Abgabe bis einschließlich 30. April 2013 im Übungskasten (in der Nähe der Bibliothek). Bitte geben Sie Ihren Namen gut lesbar an.