Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
13. 12. 2016

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 8

8.1 Wir betrachten eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und nehmen an, dass b ein Häufungspunkt dieser Folge ist. Somit gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche gegen b konvergiert: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$, ab welchem alle Folgenglieder (mit Index $k \geq N$) der Teilfolge einen Abstand kleiner als ϵ zu b haben. Damit gibt es auch für jedes $M \in \mathbb{N}$ zumindest ein Folgenglied a_n mit $n \geq M$, welches einen Abstand $|a_n - b| < \epsilon$ besitzt, d.h., es gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \forall M \in \mathbb{N} \; \exists n \geq M, n \in \mathbb{N} : \; |a_n - b| < \epsilon.$$

Sei nun umgekehrt diese Bedingung erfüllt; wir müssen jetzt zeigen, dass b ein Häufungspunkt ist, dass also eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b$ existiert. Wir konstruieren diese Teilfolge folgendermassen. Beginnend mit $n_1 := 1$ definieren wir für $k > 1$ rekursiv

$$n_k := \min\{m \in \mathbb{N} \,|\, m > n_{k-1} \wedge |a_{n_k} - b| \leq 1/k\}.$$

Dieses n_k ist wohldefiniert, da aufgrund der obigen Bedingung (setze $M := n_{k-1}$) es immer ein Folgenglied gibt, welches einen kleineren Abstand als $\epsilon := 1/k$ zu b besitzt. Des weiteren folgt aus der Konstruktion der Teilfolge, dass auch alle n_ℓ für $\ell \geq k$ näher als $1/k$ bei b liegen, d.h., $\forall \ell \geq k : |a_{n_\ell} - b| \leq 1/k$. Somit konvergiert die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen b und b ist damit ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8.2 Um das Verhalten der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \sqrt[n]{n}$ zu untersuchen und zu prüfen, ob $a_{n+1} \leq a_n$ gilt, benutzen wir, dass durch Potenzierung sich die Monotonie nicht ändert. Daher können wir uns auf die Untersuchung von

$$a_{n-1}^{n(n-1)} = (n-1)^n \geq n^{n-1} = a_n^{n(n-1)} \tag{1}$$

für $n \geq 2$ beschränken. Wenn $n = 2$ ist, gilt statt (1) jedoch

$$a_1^2 = 1^2 = 1 \leq 2^1 = a_2^2$$

und für $n = 3$

$$a_2^6 = 2^3 = 8 \leq 9 = 3^2 = a_3^6,$$

während für $n = 4$

$$a_3^{12} = 3^4 = 81 \geq 64 = 4^3 = a_4^{12},$$

die Ungleichung (1) erfüllt ist. Wir nehmen daher $n_0 = 4$ als Startpunkt für den Induktionsbeweis von (1). Unsere Induktionsannahme ist die Gültigkeit von (1), und wir müssen nun die Gültigkeit von

$$a_n^{(n+1)n} = n^{n+1} \geq (n+1)^n = a_{n+1}^{(n+1)n} \tag{2}$$

zeigen. Dazu multiplizieren wir beide Seiten von (1) mit dem Faktor $n(n+1)^n$ und erhalten

$$n(n+1)^n(n-1)^n \geq (n+1)^n n^n. \tag{3}$$

Die linke Seite von (3) kann folgendermassen abgeschätzt werden:

$$n(n+1)^n(n-1)^n = n(n^2-1)^n < n(n^2)^n = n^{2n+1}. \tag{4}$$

Eingestzt in (3) ergibt dieses

$$n^{2n+1} > (n+1)^n n^n, \tag{5}$$

welches nach Division durch n^n zu (2) wird. Somit ist für $n \geq 3$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, $a_{n+1} < a_n$. Anderseits gilt $a_1 < a_2 < a_3$, so dass wir schliesslich erhalten

$$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = a_3 = \max\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{6}$$

8.3 Nach Voraussetzung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge; sei $a > 0$ eine Schranke von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h., für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Ungleichung $|a_n| \leq a$ erfüllt. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch

$$b_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Wir definieren zudem eine Menge A_n durch

$$A_n := \{a_k \,|\, k \geq n\} \qquad \text{so dass} \quad b_n = \inf A_n.$$

Offensichtlich ist dann A_m für $m \geq n$ eine Teilmenge von A_n, insbesonders gilt $A_{n+1} \subset A_n$. Folglich sind alle unteren Schranken von A_n auch untere Schranken von A_{n+1}, und daher gilt

$$b_n = \inf A_n \leq \inf A_{n+1} = b_{n+1}.$$

Also ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (und damit auch alle A_n) durch a beschränkt ist, gilt auch $|b_n| \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton ansteigende und nach oben beschränkte Folge, welche gemäß Satz 2.62 konvergiert.

8.4 Für die Teile (i) und (iii) wollen wir Beispiele konstruieren, und für die Teile (ii) und (iv) zeigen, dass es keine Beispiele geben kann.

(i) Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indem wir für $n \in \mathbb{N}$ setzen $a_{3n-2} := 1 + 1/(3n-1)$, $a_{3n-1} := 2 + 1/3n$, und $a_{3n} := 3 + 1/(3n+1)$. Dann ist keine der Zahlen 1,2,3 ein Element von $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Diese Zahlen sind jedoch Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da die Teilfolgen $(a_{3n-j})_{n\in\mathbb{N}}$ für $j = 0, 1, 2$ konvergieren,

$$\lim_{n\to\infty} a_{3n-j} = 3 - j.$$

Die Tatsache, soweit nicht offensichtlich, dass es keine weiteren Häufungspunkte gibt, lässt sich formal beweisen, indem wir die Existenz eines Häufungspunktes $a \neq \ell$, $\ell = 1, 2, 3$, annehmen und mithilfe von $d := \min_{\ell=1,2,3}\{|a - \ell|\} > 0$ für eine gegen a konvergierende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $\ell_k \in \{1, 2, 3\}$ abschätzen:

$$\epsilon > |a - a_{n_k}| = |a - \big(\ell_k + 1/(n_k+1)\big)| \geq |a - \ell_k| - 1/(n_k+1) \geq d - 1/(n_k+1)$$

Wählen wir ein k groß genug, so dass $1/(n_k + 1) < d/2$ wird, dann folgt

$$\epsilon > d - 1/(n_k + 1) \geq d - d/2 = d/2.$$

Dieses steht jedoch im Widerspruch zu der Konvergenzbedingung, nämlich dass wir $\epsilon > 0$ beliebig klein wählen können. Folglich gibt es keine Teilfolge, welche gegen a konvergiert, und damit ist a auch kein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Angenommen, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe eine konvergente Teilfolge mit Limes a, d.h., a ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Somit müssen für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder in einer ϵ-Umgebung von a liegen, also $|a-a_n| < \epsilon$ erfüllen. Da andererseits die Folge divergiert und monoton ist, muss sie unbeschränkt sein (da sie sonst konvergierte). Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein Folgenglied a_n, welches $|a_n| \geq m$ erfüllt. Wegen der Monotonie erfüllen dann auch alle Folgenglieder mit Indizes $k > n$ die Ungleichung $|a_k| \geq m$. Wenn nun m so groß gewählt wird, dass $m \notin (a - \epsilon, a + \epsilon)$, dann können nur noch endlich viele a_n in der ϵ-Umgebung von a liegen, im Widerspruch zu der Konvergenz der Teilfolge. Also kann es keine monotone Folge geben, welche divergiert und eine konvergente Teilfolge besitzt.

(iii) Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $a_{4n} := a_{4n+3} := -1$ und $a_{4n+1} := a_{4n+2} := 1$. Für Partialsummen $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ führt dieses auf $s_{4k} = -1$, $s_{4k+1} = s_{4k+3} = 0$, und $s_{4k+2} = 1$. Somit konvergieren die obigen (konstanten) Teilfolgen der Partialsummen gegen $-1, 0$ und 1, welches damit drei Häufungspunkte der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sind.

(iv) Angenommen, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche beschränkt ist. Aufgrund der Beschränktheit von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge. Diese Teilfolge von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist wiederum auch eine konvergente Teilfolge der ursprünglichen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also kann es keine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geben, welche keine konvergente, aber eine beschränkte Teilfolge besitzt.