Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Abgabetermin:
13. 12. 2017 bis 10:30

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Übungsaufgaben, Woche 8

8.1 (6 Punkte) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie, dass

$$\forall \epsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \geq N, n \in \mathbb{N} : \; |a_n - b| < \epsilon$$

eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür ist, dass b ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

8.2 (6 Punkte) Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n := \sqrt[n]{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ welches

$$a_m = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

erfüllt? Falls ja, bestimmen Sie dieses m und vergleichen Sie a_m mit dem Maximum $\max\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. *Hinweis*: Überprüfen Sie zuerst für kleine n die Ungleichung

$$(n-1)^n \geq n^{n-1},$$

um einen passenden Wert n_0 zum Start eines Induktionsbeweises zu finden; beweisen Sie dann durch vollständige Induktion die Gültigkeit dieser Ungleichung für alle $n \geq n_0$. Was folgt aus der Ungleichung für die Monotonie der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

8.3 (6 Punkte) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass die durch

$$b_n = \inf\{a_k \,|\, k \geq n\}$$

definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

8.4 (6 Punkte für drei Teile plus 2 Bonuspunkte, falls alle vier Teilaufgaben korrekt gelöst werden) Geben Sie jeweils ein Beispiel (oder begründen Sie, warum es kein Beispiel geben kann) für:

(i) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen, welche keine der Zahlen 1,2,3 als Folgenglieder enthält, aber diese Zahlen als einzige Häufungspunkte besitzt.

(ii) Eine monotone Folge, welche divergiert, aber eine konvergente Teilfolge besitzt.

(iii) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, welche drei Häufungspunkte hat.

(iv) Eine Folge, welche keine konvergente Teilfolge, aber eine beschränkte Teilfolge enthält.

Für alle Aufgaben gilt: Begründen Sie jeden Schritt in Ihren Lösungen!

Abgabe in den entsprechenden und gekennzeichneten Abgabekästen im ersten Stock des Mathematischen Institutes (in der Nähe des Bibliothekeingangs).