

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielaufgaben für Tutorien, Woche 8

T7.1 Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen, wobei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton anwachsende und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton abfallende Folge sei, und $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte. Des weiteren gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ für die Folge der Differenzen $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass dann auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ist.

T7.2 Sei $c \in \mathbb{R}$ und $c > 0$. Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{c^n}{n!}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

T7.3 Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Beschränktheit und Häufungspunkte sowie Konvergenz in \mathbb{R} .

(i) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_n := (-1)^n - \frac{1}{n}.$$

(ii) Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gegeben durch

$$b_n := (-1)^{n+1} + \frac{1}{n^2}.$$

(iii) Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gegeben durch $c_n := a_n + b_n$.

(iv) Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gegeben durch $d_n := a_n \cdot b_n$.

(v) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gegeben durch $f_n := a_n/b_n$.

T7.4 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion (Abbildung)

$$x \mapsto f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die divergierende Folge

$$a_n := \frac{(n+2)^2}{n+1}.$$

Wir definieren die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$b_n := f(a_n).$$

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und von der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$