

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielaufgaben für Tutorien, Woche 2

T1.1 (a) Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Aussagen. Überprüfen Sie die untenstehenden Relationen auf Allgemeingültigkeit:

- (i) $(\neg \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}$
- (ii) $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg \mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B})$
- (iii) $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{B})$

(b) Auf einer Bank sitzen ein Junge und ein Mädchen. Das Kind mit den schwarzen Haaren sagt "Ich bin ein Junge," während das Kind mit den blonden Haaren behauptet "Ich bin ein Mädchen." Sie wissen, dass mindestens eines der Kinder nicht die Wahrheit sagt. Finden Sie durch Formalisieren und logische Argumentation heraus, welches Kind der Junge ist.

T1.2 Formalisieren Sie mithilfe von Quantoren:

- (i) "Sei M eine beliebige Menge. Dann gibt es immer eine Menge N , welche mit M eine leere Schnittmenge besitzt."
- (ii) "Es gibt kein x welches Element der leeren Menge ist." (Wie liesse sich dieses ohne Verwendung von \neg formalisieren?)
- (iii) "Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es immer eine Gerade, auf der beide Punkte liegen."
- (iv) "Wenn x ein Element der Menge M ist, dann sind alle y , welche ungleich x sind, nicht in M enthalten." (Zusatzfrage: Wird hierdurch eine einelementige Menge charakterisiert?)
- (v) "Für alle Mengen M gilt: Wenn es eine Menge N gibt, welche mit M eine nichtleere Schnittmenge aufweist, dann ist M nicht leer."

T1.3. (a) Sind die folgenden Relationen wahr oder falsch?

(i) $x \in \{x\}$

(ii) $\emptyset = \{\emptyset\}$

(iii) $\emptyset = \{0\}$

(iv) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(v) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

(vi) $\{a, b, a\} \subset \{a, b, b\}$

(vii) $\{a, b, b\} \subset \{a, b, \{a, a\}\}$

(viii) $\{a, \{b\}, b\} \subset \{a, b, \{a, b\}\}$

(ix) $\{a, \{b\}, b\} \cap \{a, b, \{a, b\}\} = \{a, b\}$

(b) Führen Sie die Beweise für Übung 1.21 des Vorlesungsskriptes aus.

(c) Seien A, B Mengen. Gelten dann die folgenden Gleichungen?

(i) $A \cap (B \cup A) = A$

(ii) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) = B$

(d) Welche Mengen enthält die Menge aller Teilmengen (also die Potenzmenge) von $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

T1.4. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in den folgenden Mengen:

(i) $\{a, b\}$

(ii) \emptyset

(iii) $\{(a, b)\}$

(iv) $\{1, 3, 4\} \times \{0, 2\}$

(v) $\{a, c, b\} \times (\{b\} \cap \emptyset)$