

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Übungsaufgaben, Woche 14

14.1 (6 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

(i) $f(x) := \sin\left(\frac{x}{\exp(-1/x)}\right)$ mit $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(ii) $f(x) := \log\left(\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) + \cos\left(\frac{4}{\log(x^4)}\right)\right)$ mit $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(iii) $f(x) := \sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + x^2}$ mit $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

14.2 Berechnen Sie die Grenzwerte:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

(iii) $\lim_{x \downarrow 0} \log(2x) \sqrt{x^3(x+1)}$

14.3 (6 Punkte) Bestimmen Sie sämtliche Maxima und Minima der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := e^{-2x}(12x^2 - 4x + 1)$.

14.4 (6 Punkte) Überprüfen Sie, ob die Ableitungen von folgenden Funktionen $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Nullstelle auf \mathcal{D} haben.

(i) $f(x) := \frac{x^3 - 2x^{-1} + 1}{x + 2}$ mit $\mathcal{D} = (0, 1)$

(ii) $f(x) := \frac{x^{-3} + 3x^6 + 1}{x^2 + 1}$ mit $\mathcal{D} = (0, \infty)$

14.5 (4 Bonuspunkte) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar und erfülle $f(x^2) = f(x) + x(x^2 - 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $f'(1)$ und $f''(1)$.

Für alle Aufgaben gilt: Begründen Sie jeden Schritt in Ihren Lösungen!

Abgabe in den entsprechenden und gekennzeichneten Abgabekästen im ersten Stock des Mathematischen Institutes (in der Nähe des Bibliotheeingangs).