LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2015
5. Oktober 2015

Lineare Algebra II

Nachholklausur

Nachname:	Vorname:	Matrikelnummer:

Abschluss: ❍ Bachelor ❍ Master

❍ Lehramt Gymn. (modularisiert) ❍ Lehramt Gymn. (nicht modul.)

❍ Anderes: ____________________

Studiengang: ❍ Mathematik ❍ Wirtschaftsm. ❍ ____________________

Prüfungsordnung: ____________________

Anrechnung der Credit Points für das

❍ Hauptfach

❍ Nebenfach, und zwar ____________________

❑ Ich stimme zu, dass mein Klausurergebnis im Internet nach Angabe meiner Matrikelnummer und meines bei Klausuranmeldung angegebenen Passworts abrufbar sein wird.

Bitte beachten Sie:

- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es zusammen mit allen weiteren nicht zugelassenen Hilfsmitteln in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
- Überprüfen Sie, ob Sie **vier Aufgaben** erhalten haben.
- Schreiben Sie mit einem **dokumentenechten** Stift, jedoch nicht in den Farben rot und grün.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nach- und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf den dafür vorgesehenen Blättern. Versehen Sie auch zusätzliche Blätter mit Nach- und Vornamen sowie der Aufgabennummer. Vermerken Sie deutlich, wenn Ihre Lösung auf weiteren Blättern fortgesetzt wird.
- Geben Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung ab; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- Sie haben **120 Minuten** Zeit, die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	Summe
/15	/15	/15	/15	/60

Name: ____________________

Aufgabe 1. Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $(A, B) := \mathrm{tr}(AB^t)$, wobei $A, B \in V$ und tr die Spur ist.

a) Zeigen Sie, dass $(\, , \,)$ ein inneres Produkt auf V ist.

b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ von $U := \{A \in V \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$ in V.
Hinweis: $\dim(U) = 3$.

c) Ist $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ mit $\phi(A, B) := \mathrm{tr}(AB)$ ein inneres Produkt auf V?

d) Gibt es zu jedem Vektorraum $W \subseteq V$ mit $\dim(W) = 2$ eine Orthonormalbasis $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ von V mit $\langle C_1, C_2\rangle = W$?

Natürlich müssen auch hier die Antworten vollständig begründet und die aufgestellten Behauptungen bewiesen werden.

Name: ______________________________

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie die Weierstraß'sche Normalform und die Frobenius'sche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

b) Sei $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ eine lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom

$$\chi_f(x) = x^7 + 2x^5 + x^3.$$

i) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Minimalpolynome von f.

ii) Es gelte nun zusätzlich $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f + i \cdot \mathrm{id}) = 6$, wobei mit rg der Rang der Abbildung abgekürzt wird. Bestimmen Sie alle möglichen Jordan'schen Normalformen.

Natürlich müssen auch hier die Antworten vollständig begründet und die aufgestellten Behauptungen bewiesen werden.

Name: ____

Aufgabe 3. a) Seien

$$L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ -42 \\ -42 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{und} \quad L_3 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

wobei $\langle\ ,\ ,\ \rangle$ das Erzeugnis als $\mathbb{Z}$-Modul ist.

i) Bestimmen Sie die Elementarteiler von $\mathbb{Z}^3/L_3$.

ii) Zeigen Sie, dass L_1/L_2 und $\mathbb{Z}^3/L_3$ isomorph sind.

iii) Berechnen Sie die Kardinalität von L_1/L_2.

b) Sei $P_5 = \{p \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg(p) \leq 5\}$ der $\mathbb{Z}$-Modul der Polynome vom Grad höchstens 5 und $M = \langle 1, x^3, 3x^5 \rangle$ der von den angegebenen Elementen erzeugte $\mathbb{Z}$-Untermodul von P_5. Berechnen Sie den Torsionmodul $\mathrm{T}(P_5/M)$ und den Rang des freien Anteils von P_5/M.

Natürlich müssen auch hier die Antworten vollständig begründet und die aufgestellten Behauptungen bewiesen werden.

Name: ____________________

Aufgabe 4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die reelle 100×100 Matrix $A = (\alpha_{ij})$ mit $\alpha_{ij} = i + j - 1$ und $1 \leq i, j \leq 100$ kann nicht orthogonal auf Diagonalgestalt transformiert werden.

b) Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ hat unendlich viele Einheiten.

c) Es gibt bis auf Isomorphie zwei abelsche Gruppen der Ordnung 12.

d) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

ist eine Projektion auf $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$.

e) Jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit $A^2 + 4E_n = 4A$ ist diagonalisierbar, wobei K ein Körper und E_n die Einheitsmatrix ist.

Natürlich müssen auch hier die Antworten vollständig begründet und die aufgestellten Behauptungen bewiesen werden.