



Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer, Thomas Jahn

Sommersemester 2014/15
7. September 2015

Lineare Algebra II – Abschlussklausur

Aufgabe 1

Wir betrachten in dieser Aufgabe den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen inneren Produkt $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) = v^t w$. Setze

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

- a) Geben Sie eine Orthogonalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit $V = \langle b_1, b_2 \rangle$ an.
- b) Geben Sie eine Basis von $V^\perp$ an.

Begründen Sie jeweils auch die Richtigkeit Ihres Ergebnisses.

Lösung.

a) Wir ergänzen $a_1 = (1, 0, 1)^t$, $a_2 = (0, 1, 1)^t$ durch $a_3 = (0, 0, 1)^t$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$. Mit dem Determinantenkriterium prüfen wir, dass es sich bei $\{a_1, a_2, a_3\}$ tatsächlich um ein linear unabhängiges System und damit um eine Basis des $\mathbb{R}^3$ handelt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Wir wenden das Verfahren von Gram-Schmidt auf die Basis $\{a_1, a_2, a_3\}$ an und erhalten eine Orthogonalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$. Dabei wenden wir in den ersten Schritten implizit das Verfahren von Gram-Schmidt auf die Basis $\{a_1, a_2\}$ von V an; d.h. $\{b_1, b_2\}$ ist eine Orthogonalbasis

von V ; insbesondere gilt $V = \langle b_1, b_2 \rangle$.

$$b_1 = (1, 0, 1)^t$$

$$b_2 = (0, 1, 1)^t - \frac{(0, 1, 1)(1, 0, 1)^t}{(1, 0, 1)(1, 0, 1)^t} (1, 0, 1)^t = (0, 1, 1)^t - \frac{1}{2}(1, 0, 1)^t = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)^t$$

$$\begin{aligned} b_3 &= (0, 0, 1)^t - \frac{(0, 0, 1)(1, 0, 1)^t}{(1, 0, 1)(1, 0, 1)^t} (1, 0, 1)^t - \frac{(0, 0, 1)\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)^t}{\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)^t} \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)^t \\ &= (0, 0, 1)^t - \frac{1}{2}(1, 0, 1)^t - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)^t = (0, 0, 1)^t - \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^t - \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)^t \\ &= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^t \end{aligned}$$

b) Wir behaupten $V^\perp = \langle b_3 \rangle$ und damit, dass $\{b_3\}$ eine Basis von $V^\perp$ ist (denn eine einelementige Menge, die nicht den trivialen Vektor enthält ist linear unabhängig).

Wir zeigen $\langle b_3 \rangle \subseteq V^\perp$. Sei $w \in \langle b_3 \rangle$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $w = \lambda b_3$. Für jedes $v \in V$ gibt es geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $v = \alpha b_1 + \beta b_2$. Damit gilt $(v, w) = \alpha \lambda (b_1, b_3) + \beta \lambda (b_2, b_3) = 0$, also $w \in V^\perp$.

Wir zeigen nun $V^\perp \subseteq \langle b_3 \rangle$. Sei dazu $w \in V^\perp$. Es gibt $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $w = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$. Weiterhin gilt $w \perp b_1$, d.h. $0 = (b_1, w) = \alpha(b_1, b_1) + \beta(b_1, b_2) + \gamma(b_1, b_3) = \alpha(b_1, b_1) + 0$. Wegen $(b_1, b_1) \neq 0$ folgt $\alpha = 0$. Da auch $w \perp b_2$ gilt, erhalten wir analog $\beta = 0$. Es ist also $w = \gamma b_3$ und damit $w \in \langle b_3 \rangle$.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die $\mathbb{Z}$ -Moduln $\mathbb{Z}^3/L_1$ und $\mathbb{Z}^3/L_2$ isomorph sind. Dabei sind

$$L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) Zeigen Sie, dass die $\mathbb{R}$ -Moduln $\mathbb{R}^3/M_1$ und $\mathbb{R}^3/M_2$ *nicht* isomorph sind. Dabei sind

$$M_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad M_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Hinweis: In a) ist $\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle$ das Erzeugnis als $\mathbb{Z}$ -Modul, in b) das Erzeugnis als $\mathbb{R}$ -Modul.

Lösung.

a) Wir berechnen die Elementarteiler mit dem Algorithmus aus der Vorlesung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & -7 \\ 3 & 9 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right)$$

Wir setzen den Algorithmus mit der Untermatrix fort.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{array} \right).$$

Also ist 6 der einzige Elementarteiler von $\mathbb{Z}^3/L_1$. Wir verfahren analog für den zweiten Modul:

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ -2 & -5 & -1 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Und nun:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{array} \right).$$

Also ist auch 6 der einzige Elementarteiler von $\mathbb{Z}^3/L_2$.

Zwei Moduln sind isomorph gdw. die Elementarteiler (bis aus Assoziiiertheit) übereinstimmen, was hier also der Fall ist.

- b) Endlich erzeugte $\mathbb{R}$ -Moduln sind endlichdimensionale $\mathbb{R}$ -Vektorräume und genau dann isomorph, wenn ihre Dimensionen gleich sind. Aus dem Dimensionssatz ergibt sich, dass die Quotienten genau dann gleiche Dimension haben, wenn M_1 und M_2 die gleiche Dimension haben. Diese Dimensionen ergeben sich aus den Rängen der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Die linke Matrix hat Rang ≤ 2 (die letzte Zeile ist Summe der ersten beiden); die rechte Matrix ist invertierbar (Determinante = 3) und hat damit Rang 3. Die Ränge sind also verschieden und damit die Moduln nicht isomorph.

Aufgabe 3

- a) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, so ist $K \times K$ ein Integritätsbereich mit komponentenweiser Multiplikation.
- b) Beweisen oder widerlegen Sie: Sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein K -Unterraum. Zu jedem $\varphi \in U^*$ existiert ein $\hat{\varphi} \in V^*$ mit der Eigenschaft, dass für alle $u \in U$ die Gleichung $\hat{\varphi}(u) = \varphi(u)$ gilt. Dabei bezeichnen U^* bzw. V^* die Dualräume zu U bzw. V .
- c) Beweisen oder widerlegen Sie: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix mit $A^* = -A$, wobei hier $A^* = (\bar{a}_{ji})$ die zu $A = (a_{ij})$ transponierte konjugierte Matrix bezeichnet. Dann hat jeder Eigenwert von A Realteil 0.

- d) Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen in $M_3(\mathbb{C})$ diagonalisierbar sind. Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Entscheidung.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- e) Entscheiden Sie, welche der folgenden simultanen Kongruenzen lösbar sind. Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Entscheidung.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{17} \\ x \equiv 2 \pmod{23} \end{cases} \quad \begin{cases} y \equiv 1 \pmod{7} \\ y \equiv 2 \pmod{21} \end{cases}$$

Lösung.

- a) Falsch. Sei $K = \mathbb{R}$. Dann sind $(1, 0), (0, 1) \in K \times K$ nicht trivial, aber $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$.
- b) Wahr. Wähle eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von V , sodass $b_1, \dots, b_m$ (für $m \leq n$) eine Basis von U ist. Sei $(a_1, \dots, a_m)$ die Matrixdarstellung von ϕ bzgl. dieser Basis (und der Basis $\{1\}$ von K). Die Abbildung $v \mapsto (a_1, \dots, a_m, 0, \dots, 0)v$ liefert einen Homomorphismus $\widehat{\phi} : V \rightarrow K$. Weiter gilt für $i \leq m$: $\widehat{\phi}(b_i) = a_i = \varphi(b_i)$, also ist auch die gewünschte Bedingung erfüllt.
- c) Wahr. Die Matrix ist anti-hermitesch und damit normal, also unitär diagonalisierbar, etwa $D = UAU^*$. Nun gilt $\overline{D} = -D$, also für jeden EW: $\overline{\lambda} = -\lambda$ und daher $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$.
- d) A ist diagonalisierbar. Man liest sofort das Minimalpolynom $(x-1)(x-2)(x-3)$ ab (Dreiecksmatrix!) und daraus folgt die Diagonalisierbarkeit, da das Minimalpolynom in verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

B ist nicht diagonalisierbar. Die Matrix B liegt bereits in JNF vor. Wäre Sie diagonalisierbar, so wäre auch die JNF eine Diagonalmatrix.

C ist diagonalisierbar. Die Matrix A ist symmetrisch, also auch normal und damit unitär diagonalisierbar.

- e) Das linke System ist lösbar. Die Zahlen 17 und 23 sind teilerfremd also garantiert der Chinesische Restsatz die Lösbarkeit des Systems.

Das rechte System ist nicht lösbar. Es ist $21 = 7 \cdot 3$. Die zweite Gleichung modulo 7 ergibt die Gleichung $y \equiv 2 \pmod{7}$. Es folgt also $1 \equiv 2 \pmod{7}$, was nicht der Fall ist.

Aufgabe 4

Sei $p(X) = X^3 - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$.

- a) Bestimmen Sie die irreduziblen Faktoren von p im Ring $\mathbb{Q}[X]$.

- b) Finden Sie zwei 5×5 Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$, die das Minimalpolynom p haben und zueinander *nicht* ähnlich sind.
- c) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$, sodass für jede Matrix A aus b) die Gleichung $f(A) = A^{-1}$ erfüllt ist.
(Hinweis: Diesen Aufgabenteil können Sie auch lösen, wenn Sie Teil b) nicht gelöst haben.)

Beweisen Sie jeweils auch die Richtigkeit Ihres Ergebnisses!

Lösung.

- a) Es gilt $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$. Wir behaupten, dass diese beiden Polynome irreduzibel sind. Das erste, $X - 1$, ist irreduzibel da es vom Grad eins ist. Für das zweite Polynom, $X^2 + X + 1$ genügt es, da es vom Grad zwei ist, zu zeigen, dass es keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$ hat. Die Nullstellen (über $\mathbb{C}$) lassen sich mit der Lösungsformel bestimmen. In dieser enthalten ist die Diskriminante $1 - 4 = -3$; da diese negativ ist, gibt es keine Nullstellen in $\mathbb{R}$, geschweige denn in $\mathbb{Q}$. Also ist auch das zweite Polynom irreduzibel über $\mathbb{Q}$.
- b) Eine 5×5 Matrix hat ein charakteristisches Polynom vom Grad 5 das aus Potenzen der irreduziblen Faktoren des Minimalpolynoms besteht. Folgende zwei charakteristischen Polynome lassen sich z.B. so erstellen (es sind sogar die einzigen beiden Möglichkeiten, aber das tut hier nichts zur Sache):

$$\chi_1(X) = (X - 1)^3(X^2 + X + 1) \quad \text{und} \quad \chi_2(X) = (X - 1)(X^2 + X + 1)^2.$$

Wir konstruieren nun Matrizen mit diesen charakteristischen Polynomen und dem gewünschten Minimalpolynom. Dazu bietet sich die Weierstraß'sche Normalform an. Wir konstruieren also Matrizen bestehend aus den Begleitmatrizen zu $X - 1$ und $X^2 + X + 1$ bzw. zu $X^2 + X + 1$ und $(X - 1)(X^2 + X + 1)$, da die gesuchten Matrizen die Elementarteilerreihen $(X - 1), (X - 1), (X - 1)(X^2 + X + 1)$ bzw. $X^2 + X + 1, (X - 1)(X^2 + X + 1)$ haben sollen. Wir erhalten somit:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 & \\ & & \hline & & 0 & -1 \\ & & \hline & & 1 & -1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & \\ \hline 1 & -1 & \\ \hline & & 1 & \\ & & \hline & & 0 & -1 \\ & & \hline & & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Diese Matrizen haben nach Konstruktion beide das Minimalpolynom p und die charakteristischen Polynome χ_1 bzw. χ_2 .

Ähnliche Matrizen haben insbesondere das selbe charakteristische Polynom. Wegen $\chi_1 \neq \chi_2$ sind die beiden angegebenen Matrizen also nicht ähnlich.

- c) Die Matrizen aus b) haben das Minimalpolynom $p(X) = X^3 - 1$ und es gilt daher $p(A) = A^3 - E_3 = 0$. Also gilt $A^3 = E_3$ und somit $A^2 = A^{-1}$. Es ist also $f(X) = X^2$ das gewünschte Polynom.