LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
18. Juni 2019

Höhere Algebra
Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal im noetherschen Ring A.
Wir bezeichnen mit $S_{\mathfrak{p}}(0)$ den Kern des kanonischen Homomorphismus $A \to A_{\mathfrak{p}}$.
Zeigen Sie:

a) $S_{\mathfrak{p}}(0) \subseteq \mathfrak{p}$.

b) $\sqrt{S_{\mathfrak{p}}(0)} = \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p}$ ist ein minimales Primideal von A.

c) Wenn $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}'$ gilt, dann gilt $S_{\mathfrak{p}}(0) \subseteq S_{\mathfrak{p}'}(0)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Seien $A \subseteq B$ Ringe und $b \in B$.
Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $b \in B$ ist ganz über A.

ii) $A[b]$ ist ein endlich erzeugter A-Modul.

iii) $A[b]$ liegt in einem Unterring $C \subseteq B$, wobei C ein endlich erzeugter A-Modul ist.

iv) Es gibt einen $A[b]$-Modul M mit $Ann_{A[b]}(M) = 0$, der als A-Modul endlich erzeugt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Seien $A \subseteq B$ und $B \subseteq D$ Ringe. Zeigen Sie:

a) Ist B ganz über A und D ganz über B, dann ist D ganz über A.

b) Ist $C := \mathcal{O}_{B,A}$ (d.h. der ganze Abschluss von A in B), so ist C ganz abgeschlossen in B (d.h. C ist die maximale ganze Erweiterung von A).

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Sei K eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, also ein Zahlkörper, und $\mathcal{O}_K$ der Ganzheitsring von K.
Zeigen Sie:

a) Ein Element $\alpha \in K$ liegt genau dann in $\mathcal{O}_K$, wenn dass Minimalpolynom von α in $\mathbb{Z}[x]$ liegt.

b) Sei nun $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, mit $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ quadratfrei. Dann gilt

$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}], & \text{für } d \equiv 2,3 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}], & \text{für } d \equiv 1 \bmod 4. \end{cases}$$

Ihre Lösungen sind spätestens am **Freitag, 28. Juni 2019** um **10:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen.