Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
8. Juli 2019

Höhere Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Seien $\mathfrak{p}_1 = (x, y)$, $\mathfrak{p}_2 = (x, z)$ und $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ Ideale in $k[x, y, z]$. Sei zudem $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Wir wollen nun zeige, dass

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$$

eine minimale Primärzerlegung ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 &= (x^2, xz, xy, yz) = \mathfrak{a} \\ \mathfrak{m}^2 &= (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz) \end{aligned}$$

Nun kann man nachrechnen, dass $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = (x, yz)$ gilt. Es bleibt als zu zeigen, dass

$$(x, yz) \cap \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{a}$$

gilt. Die Inklusion $\supseteq$ ist klar. Wir wollen also noch die Inklusion $\subseteq$ zeigen.
Sei dazu $h_1x^2 + h_2y^2 + h_3z^2 + h_4xy + h_5xz + h_6yz \in (x, yz) \cap \mathfrak{m}^2$. Also bleibt zu zeigen, dass $h_2y^2 + h_3z^2 \in \mathfrak{a}$ liegt. Es gilt aber einerseits

$$\begin{aligned} h_2y^2 + h_3z^2 \in (x, yz) \subseteq (x, y) &\Rightarrow h_3z^2 \in (x, y) \\ &\Rightarrow h_3 \in (x, y) \\ &\Rightarrow h_3z^2 \in (xz^2, yz^2) \subseteq \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Anderseits aber auch

$$\begin{aligned} h_2y^2 + h_3z^2 \in (x, z) &\Rightarrow h_2y^2 \in (x, z) \\ &\Rightarrow h_2 \in (x, z) \\ &\Rightarrow h_2y^2 \in (xy^2, zy^2) \subseteq \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Wir wissen nun

$$\sqrt{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{p}_1, \sqrt{\mathfrak{p}_2} = \mathfrak{p}_2, \text{ und } \sqrt{\mathfrak{m}^2} = \mathfrak{m},$$

da für maximale Ideale $\mathfrak{m}$ gilt

$$\sqrt{\mathfrak{m}^n} = \bigcap_{\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \mathfrak{m}$$

Wegen $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \neq \mathfrak{a}$, da zum Beispiel $x \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ und $x \notin \mathfrak{a}$, sowie

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{m}^2 &= (x, y) \cap \mathfrak{m}^2 \ni y^2 \\ \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2 &= (x, z) \cap \mathfrak{m}^2 \ni z^2 \end{aligned}$$

aber $y^2 \notin \mathfrak{p}_2$, also $y^2 \notin \mathfrak{a}$, sowie $z^2 \notin \mathfrak{p}_1$, also $z^2 \notin \mathfrak{a}$. Also ist die Zerlegung minimal. Außerdem sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ isoliert und $\mathfrak{m}$ eingebettet.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Unter den gegebenen Voraussetzungen können wir folgendes beweisen:

a) Sei $p = p_i$, $e = e_i$. Es ist zu zeigen:
$$fg \in (p^e), g \notin (p^e) \implies \exists m \in \mathbb{N} : f^m \in (p^e).$$
Dazu genügt es zu zeigen: $p \mid f$.
Sei dazu $n := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid g\}$. Dann ist $n < e$ und $p^{e-n} \mid fg'$ mit $g' = g/p^n$. Also insbesondere $p \mid fg'$ und $p \nmid g'$. Da p prim ist, folgt $p \mid f$.

b) Offensichtlich gilt $(gp^e) \subseteq (g) \cap (p^e)$. Sei umgekehrt $gh \in (p^e)$, d.h. $p^e \mid gh$. Da p prim ist, folgt $p \mid h$. Dies impliziert $p^{e-1} \mid gh_1$ mit $h_1 = h/p$. Mittels Induktion folgt $p^e \mid h$, d.h $gh \in (gp^e)$.

c) Aus b) folgt zusammen mit einer Induktion
$$(f) = \bigcap_{i=1}^{s} (p_i^{e_i}).$$
Nach a) ist dies eine Primärzerlegung. Daher ist $\mathrm{Ass}_R(R/(f)) \subseteq \{(p_1), \ldots, (p_s)\}$. Wegen $\mathrm{Ann}_R(f/p_i + (f)) = (p_i)$ gilt auch die umgekehrte Inklusion. Damit ist die Zerlegung minimal.

Für die nächste Aufgabe zeigen wir zuerst allgemeiner folgendes Lemma:

Lemma 1 *Sei R ein Ring und $f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in R[[x]]$. Es gilt*
$$f \in R[[x]]^\times \Leftrightarrow f(0) = a_0 \in R^\times$$

Beweis 1 *'$\Rightarrow$': Sei $f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ eine Einheit mit Inversem $f^{-1} = \sum_{n\geq 0} a'_n x^n$. Dann gilt*
$$\Rightarrow 1 = ff^{-1} = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i+j=n} a_i a'_j \right) x^n$$
$$\Rightarrow a_0 a'_0 = 1 \Rightarrow a_0 = f(0) \in R^\times.$$
'$\Leftarrow$': Sei $f(0) = a_0 \in R^\times$. Wir definieren $\hat{f} := \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ mit
$$b_0 = a_0^{-1}, \text{ exisiert da } a_0 \in R^\times,$$
$$b_{k+1} = -a_0^{-1} \sum_{i+j=k+1, j\leq k} a_i b_j$$
Dann kann man Nachrechnen, dass gilt
$$f\hat{f} = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) x^n.$$
Für $n = 0$ bekommen wir nun $a_0 b_0 = a_0 a_0^{-1} = 1$.
Für $n \geq 1$ bekommen wir:
$$\begin{aligned} \sum_{i+j=n} a_i b_j &= a_0 b_n + \sum_{i+j=n, j<n} a_i b_j \\ &= a_0 \Big(-a_0^{-1} \sum_{i+j=n, j<n} a_i b_j\Big) + \sum_{i+j=n, j<n} a_i b_j = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt aber, dass $f\hat{f} = 1$ gilt und wir haben ein f^{-1} zu f konstruiert, was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 3 (6 Punkte).

a) Aus dem Tutorium wissen wir, dass ein Ring $A \neq 0$ genau dann ein lokaler Ring ist, wenn die Nichteinheiten in A ein Ideal bilden bzw. alle Nichteinheiten in einem Ideal $\mathfrak{m} \subsetneq A$ liegen.
Per Voraussetzung ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und somit sind in $\mathfrak{m}$ alle Nichteinheiten aus R. Mit dem Lemma oben bekommen wir:

$$R[[x]]^{\times} = \{f \in R[[x]] \mid f(0) \in R^{\times}\}$$

also sofort auch für die Nichteinheiten

$$R[[x]] \setminus R[[x]]^{\times} = \{f \in R[[x]] \mid f(0) \in \mathfrak{m}\} = (\mathfrak{m}, x),$$

was offensichtlich ein Ideal ist. Mit dem oben zitierten Satz ist $(\mathfrak{m}, x)$ auch das maximale Ideal von $R[[x]]$.

b) Da $\mathbb{Z}_{(p)}$ ein Integritätsbereich (IBR) ist, ist der Potenzreihenring über $\mathbb{Z}_{(p)}$ ebenfalls ein IBR. Also ist (0) ein Primideal, da $\mathbb{Z}_{(p)}[[x]]/(0)$ ein IBR ist. Nach Teilaufgabe a) wissen wir, dass $\mathbb{Z}_{(p)}[[x]]$ ein lokaler Ring ist mit maximalem Ideal (p, x). Also kann (0) nicht als der Schnitt von maximalen Idealen dargestellt werden und $\mathbb{Z}_{(p)}[[x]]$ ist somit kein Jacobsonring.