Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
13. Juni 2019

Höhere Algebra
Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Sei k ein Körper und seien $\mathfrak{p}_1 = (x, y)$, $\mathfrak{p}_2 = (x, z)$ und $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ Ideale in $k[x, y, z]$.
Sei zudem $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$ eine minimale Darstellung von $\mathfrak{a}$ ist. Welche Komponenten sind isoliert und welche sind eingebettet?

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Sei R noethersch und nullteilerfrei. Sei $f = u p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s} \in R$, wobei u eine Einheit ist und die p_i Primelemente, die paarweise nicht zueinander assoziiert sind.

a) Zeigen Sie: $(p_i^{e_i})$ ist (p_i)-primär.

b) Seien $p, g \in R$, p prim und $p \nmid g$.
Zeigen Sie: $(g) \cap (p^e) = (gp^e)$.

c) Zeigen Sie: $(f) = \bigcap_{i=1}^{s} (p_i^{e_i})$ ist eine minimale Primärzerlegung.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $R[[x]] := \{\sum_{i \geq 0} a_i x^i \mid a_i \in R\}$ der Ring der formalen Potenzreihen über R.

a) Zeigen Sie, dass $R[[x]]$ ein lokaler Ring ist und bestimmen Sie das maximale Ideal dieses Rings.

b) Sei nun $R = \mathbb{Z}_{(p)}$. Zeigen Sie, dass $R[[x]]$ kein Jacobsonring ist.[1]

Ihre Lösungen sind spätestens am **Freitag, 21. Juni 2019** um **10:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen.

[1] Ein Ring R ist ein Jacobsonring, falls jedes Primideal Schnitt von maximalen Idealen ist.