LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2016
9. Juli 2019

Höhere Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (6 Punkte).

a) $\Rightarrow$ b): Sei $\bar{x}$ ein Nullteiler in R/I. Dann gibt es ein $\bar{y} \neq \bar{0} \in R/I$, so dass $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$. Also gilt $y \notin I$ und $xy \in I$, mit a) folgt dann, dass es ein $n \geq 1$ gibt mit $x^n \in I$, d.h. $\bar{x}^n = \bar{0}$, also ist $\bar{x}$ nilpotent.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $xy \in I$. OBdA $x \notin I$. Dann gilt $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$ mit $\bar{x} \neq \bar{0}$, d.h. $\bar{y}$ ist ein Nullteiler in R/I. Nach Voraussetzung sind aber alle Nullteiler nilpotent, d.h. es existiert ein $n \geq 1$ mit $\bar{y}^n = \bar{0}$, also $y^n \in I$.

b) $\Rightarrow$ c): In Aufgabe 2 c) zeigen wir sogar mehr.

c) $\Rightarrow$ b): Es gilt nun $\mathrm{Ass}_R(R/I) = \{\mathfrak{p}\}$.
Sei $\bar{x}$ ein Nullteiler auf R/I. Die Menge $R \setminus \mathfrak{p}$ ist gerade die Menge der Nicht-Nullteiler auf R/I, also folgt $x \in \mathfrak{p}$. Nach Satz 6.2.3 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{p}^n \cdot (R/I) = 0$. Insbesondere, also $x^n \cdot (R/I) = (0)$, d.h. $x^n \in I$. Damit ist $\bar{x}$ nilpotent in R/I.

Die Bedingung $I \neq (0)$ wird in den Beweisen nicht benutzt und ist somit auch nicht notwendig. Danke für den Hinweis.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

a) Wir verwenden die Definition von Aufgabe 1 b). Sei $\mathfrak{p} := \sqrt{I}$. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Sei dazu $fg \in \mathfrak{p}$ und $f \notin \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n g^n \in I$. Wegen $f \notin \mathfrak{p}$ gilt $f^n \notin I$. Also ist $\bar{g}^n$ ein Nullteiler in R/I. Da jeder Nullteiler nilpotent ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $g^{nm} \in I$, also $g \in \mathfrak{p}$.

b) Wenn wir die Definition in Aufgabe 1 a) für das Primärideal I wählen ist dies klar, da wir $n = 1$ wählen können.

c) Wir verwenden die Definition von Aufgabe 1 b). Sei $\mathfrak{p} := \sqrt{I}$, $x \in R \setminus I$ und $f \in \mathrm{Ann}_R(\bar{x})$. Dann gilt $fx \in I$. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n \in I$, d.h. $f \in \mathfrak{p}$. Falls also $\mathrm{Ann}_R(\bar{x}) = \mathfrak{c}$ ein Primideal ist, so folgt $I \subseteq \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ endlich erzeugt ist (hier benötigen wir die Voraussetzung: R noethersch), gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{p}^m \subseteq I$, also auch $\mathfrak{p}^m \subseteq \mathfrak{c}$. Da $\mathfrak{c}$ prim ist, folgt $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{c}$, also $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

a) Sei $\mathcal{N} = R \backslash U$ die Menge der Nullteiler. Die Primideale in $K(R)$ entsprechen eineindeutig den Primidealen $P \subseteq R$ mit $P \subseteq \mathcal{N}$. Sei $\mathfrak{m} \subseteq K(R)$ ein maximales Ideal. Dann gibt es also ein Primideal P von R mit $P \subseteq \mathcal{N}$ und $U^{-1}P = \mathfrak{m}$. Nach Satz 6.1.2 b) gilt

$$\mathcal{N} = \bigcup_{Q \in \mathrm{Ass}_R(R)} Q,$$

also insbesondere $P \subseteq \bigcup Q$. Nach Lemma 6.1.3 folgt $P \subseteq Q$ für ein $Q \in \operatorname{Ass}_R(R)$. Da $\mathfrak{m}$ maximal ist, muss P ein maximales Element in $\operatorname{Ass}_R(R)$ sein. Also entsprechen die maximalen Ideale in $K(R)$ genau den maximalen Elementen in $\operatorname{Ass}_R(R)$.

b) Die Menge U der Nicht-Nullteiler ist gegeben durch $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$. Also ist $K(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Die Ideale von $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ sind gegeben durch $(0)\times(0), (0)\times\mathbb{Q}, \mathbb{Q}\times(0), \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Die maximalen Ideale sind gerade $(0)\times\mathbb{Q}, \mathbb{Q}\times(0)$, korrespondierend zu $\operatorname{Ass}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = \{\mathbb{Z}\times(0), (0)\times\mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

a) In dieser Aufgabe nutzen wir ohne zusätzlichen Verweis, dass Lokalisierung mit der Bildung von endlichen direkten Summen, von endlichen Durschnitten und von Quotienten kommutiert. Wenn die Aussage nun für zwei R-Moduln M und N gilt, dann gilt sie auch für $M+N$:

$$\begin{aligned} U^{-1}(\operatorname{Ann}(M+N)) &= U^{-1}(\operatorname{Ann}(M)\cap\operatorname{Ann}(N)) \\ &= U^{-1}(\operatorname{Ann}(M))\cap U^{-1}(\operatorname{Ann}(N)) \\ &= \operatorname{Ann}(U^{-1}M)\cap\operatorname{Ann}(S^{-1N}) \\ &= \operatorname{Ann}(U^{-1}M+U^{-1}N) \\ &= \operatorname{Ann}(U^{-1}(M+N)). \end{aligned}$$

Also reicht es die Aussage für ein M zu zeigen, dass von einem Element erezeugt wird. Unter dieser Voraussetzung gilt nun $M \cong R/\operatorname{Ann}(M)$ (als R-Moduln). Daraus folgt

$$\operatorname{Ann}(U^{-1}M) \cong (U^{-1}R)/(U^{-1}\operatorname{Ann}(M))$$

und somit $\operatorname{Ann}(U^{-1}M) = U^{-1}\operatorname{Ann}(M)$.

b) Wir setzen $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Z}$ und $U = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Man kann nun einfach nachrechnen, dass M nicht endlich erzeugt ist als $\mathbb{Z}$-Modul. Es gilt $\operatorname{Ann}_R(M) = 0$, aber $\operatorname{Ann}_{U^{-1}R}(U^{-1}M) = \mathbb{Q}$ wegen $U^{-1}M = 0$.