LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
7. Juni 2019

Höhere Algebra
Übungsblatt 7

Wir wollen auf diesem Blatt voraussetzen für die ersten drei Aufgaben voraussetzen, dass R ein kommutativer noetherscher Ring ist.

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Sei I ein echtes Ideal in R, i.e. $I \neq (0), R$.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Wenn $xy \in I$ für $x, y \in R$ gilt, dann gilt $x \in I$ oder $y^n \in I$ für ein $n \geq 1$.

b) Jeder Nullteiler von R/I ist nilpotent.

c) $|\operatorname{Ass}_R(R/I)| = 1$.

Ein Ideal das die obigen Bedingungen erfüllt nennen wir *Primärideal*.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Sei nun I ein in Aufgabe 1 definiertes Primärideal. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\sqrt{I}$ ist ein Primideal.

b) Jedes Primideal ist ein Primärideal.

c) $\operatorname{Ass}_R(R/I) = \{\sqrt{I}\}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Sei $U \subseteq R$ die Menge der Nicht-Nullteiler.
Dann heißt $K(R) := U^{-1}R$ der *totale Quotientenring* von R.

a) Benutzen Sie die Endlichkeit von $\operatorname{Ass}_R(R)$ um zu zeigen, dass es in $K(R)$ nur endlich viele maximale Ideale gibt.

b) Berechnen Sie $K(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, sowie alle seine Ideale.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Sei R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul und $U \subseteq R$ multiplikativ.
Dann gilt stets: $U^{-1}\operatorname{Ann}_R(M) \subseteq \operatorname{Ann}_{U^{-1}R}(U^{-1}M)$.

a) Zeigen Sie, dass falls M endlich erzeugt über R ist, $U^{-1}\operatorname{Ann}_R(M) = \operatorname{Ann}_{U^{-1}R}(U^{-1}M)$ gilt.

b) Finden Sie ein Gegenbeispiel, falls M nicht endlich erzeugt ist.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Freitag, 14. Juni 2019** um **10:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen.