Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
9. Juli 2019

Höhere Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (6 Punkte).

a) Satz 5.2.1 aus der Vorlesung besagt, dass für einen A-Modul M gilt:

$$M \text{ hat eine Kompositionsreihe } \Leftrightarrow M \text{ ist artisch und noethersch.}$$

Außerdem gilt: M hat eine Kompositionsreihe $\Leftrightarrow$ length$(M) < \infty$ und wir halten fest, dass die Aussage von Aufgabe 4 auf Blatt 5 auch für artinsche Ringe gilt. Dies bezeichnen wir hier mit $(*)$.

Sei nun length$(M) < \infty$. Mit Satz 5.2.1 ist M artinsch und noethersch und $(*)$ sind auch M' und M'' artinsch und noethersch. Erneute Anwendung von Satz 5.2.1 und der darunter angegebenen Äquivalenz liefert uns nun, dass length$(M') < \infty$ und length$(M'') < \infty$ gilt.

Die Rückrichtung ist ebenfalls eine direkte Anwendung von $(*)$ und Satz 5.2.1.

b) Wir betrachten eine Kompositionsreihe

$$M' \supsetneq \ldots \supsetneq M'_s = 0$$

von M' und eine Kompositionsreihe

$$M'' \supsetneq \ldots \supsetneq M''_t = 0$$

von M''. Wir müssen nun zeigen, dass M eine Kompositionsreihe der Länge $s+t$ besitzt. Da f injektiv ist, folgt aus dem Homomorphiesatz, dass $M' \cong \mathrm{im}(f)$ gilt. Deshalb gibt es eine Kompositionsreihe der Länge s von $\mathrm{im}(f)$. Außerdem ist g surjektiv, also erhalten wir eine Kette

$$M = g^{-1}(M'') \supsetneq \ldots \supsetneq g^{-1}(M''_t) = \ker(g).$$

Wegen der Surjektivität lässt sich diese Kette nicht mehr verfeinern (sonst wäre die Kette von M'' oben keine Kompositionsreihe) und da wir Exaktheit bei M haben (d.h. $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$), erhalten wir durch Konkatenation der beiden neu konstruierten Ketten eine Kompositionsreihe der Länge $s+t$.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Für i) $\Rightarrow$ ii) sei $\ldots \subsetneq V_i \subsetneq V_{i+1} \subsetneq \ldots$ eine Kette von k-Untermoduln $V_i \subseteq V$. Jedes V_i ist zugleich Untervektorraum von V. Zusammen mit $V_i \neq V_{i+1}$ folgt $\dim_k V_i < \dim_k V_{i+1}$ für alle i. Wegen $\dim_k V < \infty$ können die V_i nur endlich viele Grade annehmen und daher treten nur endlich viele V_i auf.

ii) $\Rightarrow$ iii) und ii) $\Rightarrow$ iv) sind klar, weil wir nur endliche Ketten bilden können.
iii) $\Rightarrow$ i) beweisen wir durch Kontraposition und nehmen V als unendlich dimensionalen Vektorraum mit Basis $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ an. Es ist aber dann $\langle b_1 \rangle \subsetneq \langle b_1, b_2 \rangle \subsetneq \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \subsetneq \dots$ eine Kette von k-Untermoduln, die niemals stationär wird. V ist damit nicht noethersch.
Für die letzte Aussage sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V. Die Kette

$$V = V_0 = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \supsetneq V_1 = \langle b_1, \dots, b_{n-1} \rangle \supsetneq \dots \supsetneq 0 = V_n$$

ist eine Kompositionsreihe der Länge n, da $\dim_k(V_i/V_{i+1}) = 1$ für $i \in \{0, \dots, n-1\}$ und die Quotienten somit einfach als k-Moduln sind. Daraus folgt aber sofort, dass für eine k-Modul V gilt: $\dim_k(V) = \text{length}(V)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Sei A ein kommutativer Ring, I ein Ideal von R und M ein endlich erzeugter A-Modul, i.e. $M = \langle m_1, \dots, m_s \rangle$. Wir wollen nun zeigen, dass gilt

$$\sqrt{\text{Ann}_A(M/IM)} = \sqrt{\text{Ann}_A(M) + I}.$$

Es gilt einerseits

$$\begin{aligned}
f &\in \sqrt{\text{Ann}_A(M) + I} \\
&\Leftrightarrow f^k \in \text{Ann}_A(M) + I, \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow f^k = g + h \text{ mit } gM = 0, h \in I \\
&\Rightarrow f^k M = (g+h)M \subseteq hM \subseteq IM \\
&\Rightarrow f \in \sqrt{\text{Ann}_A(M/IM)}
\end{aligned}$$

Andererseits, gilt

$$\begin{aligned}
f &\in \sqrt{\text{Ann}_A(M/IM)} \\
&\Leftrightarrow f^k \in \text{Ann}_A(M/IM) \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow f^k m_i \in IM \text{ für } i = 1, \dots, s \\
&\Leftrightarrow f^k m_i = \sum_{j=1}^{s} x_{ij} m_j, \text{ für } x_{ij} \in I \text{ und } i = 1, \dots, s \\
&\Leftrightarrow Cm = 0 \text{ mit } C := \Big(\text{Diag}(f^k) - (x_{ij})\Big)_{i,j \in \{1,\dots,s\}} \text{ und } m := (m_1, \dots, m_s)^t \\
&\Rightarrow \det(C) \in \text{Ann}_A(M) \text{ und } \det(C) = f^n + h \text{ ab einem } n \in \mathbb{N}, h \in I \\
&\Rightarrow f^n \in \text{Ann}_A(M) + I \\
&\Rightarrow f \in \sqrt{\text{Ann}_A(M) + I}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte).

Da M endlich erzeugt ist, ist es ein Quotient von A^n für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ (man wähle bspw. für jeden Erzeuger von M eine Kopie von A und schicke $1 \in A$ auf diesen Erzeuger). Dies liefert uns eine natürliche surjektive Abbildung $\sigma : A^n \to M$.

Nun sehen wir ein, dass wir die Aussage von Aufgabe 4 auf Übungsblatt 5 mit dem gleichen Beweis auch für artinsche Ringe bekommen, i.e. $(*)$ aus Aufgabe 1. Damit ist aber A^n artinsch und die kurze exakte Sequenz $0 \to \ker(\sigma) \to A^n \to M \to 0$ liefert uns dann, dass M artinsch ist.