



Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
31. Mai 2019

Höhere Algebra Übungsblatt 6

Alle Ringe auf diesem Übungsblatt sind kommutativ.

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Sei A ein Ring und

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von A -Moduln. Zeigen Sie:

- $\text{length}(M) < \infty \Leftrightarrow \text{length } M' < \infty$ und $\text{length } M'' < \infty$, sowie
- $\text{length}(M') + \text{length}(M'') = \text{length}(M)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

Zeigen Sie, dass für einen k -Vektorraum V (k Körper) folgende Aussagen äquivalent sind:

- Die Vektorraumdimension $\dim_k V$ ist endlich.
- Die Länge von V als k -Modul ist endlich.
- Der k -Modul V ist noethersch.
- Der k -Modul V ist artinsch.

Zeigen Sie außerdem, dass gilt: Wenn eine der Bedingungen i)-iv) erfüllt ist, dann gilt:

$$\dim_k(V) = \text{length}(V).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Sei A ein Ring, I ein Ideal von A und M ein endlich erzeugter A -Modul. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\sqrt{\text{Ann}_A(M/IM)} = \sqrt{\text{Ann}_A(M) + I}.$$

Hinweis: Für eine Richtung kann man die Beweisidee des Satzes von Cayley-Hamilton (Satz 3.2.1 im Protokoll) verwenden.

Aufgabe 4 (3 Punkte).

Sei A ein artinscher Ring und M ein endlich erzeugter A -Modul. Zeigen Sie, dass M artinsch ist.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Freitag, 7. Juni 2019** um **10:00 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Es gibt keinen Notenbonus für diese Veranstaltung. Die erreichten Punkte bei der Korrektur dienen lediglich zu Ihrer Information.