Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
9. Juli 2019

Höhere Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Wir wollen zuerst folgende Aussage festhalten, die uns eine (oft sehr nützliche) äquivalente Charakterisierung von Flachheit liefert: Sei M ein A-Modul. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

a) Wenn $S : 0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ eine beliebige exakte Sequenz ist, dann ist $S \otimes M$ eine exakte Sequenz.
b) Wenn $f : N' \to N$ ein injektiver A-Modulhomomorphismus ist, dann ist $f \otimes \mathrm{id}_M : N' \otimes M \to N \otimes M$ injektiver A-Modulhomomorphismus.

Dies Äquivalenz folgt direkt aus Satz 4.2.6 d) der Vorlesung.
Zusätzlich ist auch folgende Verallgemeinerung von Satz 4.2.6 c) der Vorlesung oft nützlich: Seien M_i und N A-Moduln und $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Dann gilt:

$$N \otimes M \cong \bigoplus_{i\in I} (N \otimes M_i)$$

a) Sei $j : N' \to N$ ein A-Modulhomomorphismus.
Mit den Isomorphismen aus der Vorlesung können $j \otimes \mathrm{id}_M$ mit
$h : \bigoplus_{i\in I}(N' \otimes M_i) \to \bigoplus_{i\in I}(N \otimes M_i)$ identifizieren. Die Kompositionen

$$N' \otimes M_i \to \bigoplus_{i\in I}(N' \otimes M_i) \overset{\cong}{\to} N' \otimes M \overset{j\otimes \mathrm{id}_M}{\to} N \otimes M \overset{\cong}{\to} \bigoplus_{i\in I}(N \otimes M_i) \to N \otimes M_i$$

sind $j \otimes \mathrm{id}_{M_i}$, wobei die erste Abbildung injektiv und die letzte Abbildung surjektiv ist.
Also ist h die direkte Summe der $j \otimes \mathrm{id}_{M_i}$, und somit $j \otimes \mathrm{id}_M$ injektiv, wenn alle $j \otimes \mathrm{id}_{M_i}$ injektiv sind.
Wenn alle M_i flach sind und j injektiv ist, dann ist auch jedes $j \otimes \mathrm{id}_{M_i}$ und somit $j \otimes \mathrm{id}_M$. Also ist M flach.
Andererseits, wenn ein M_i nicht flach ist, dann gibt es ein j, so dass $j \otimes \mathrm{id}_{M_i}$ nicht injektiv ist, und somit ist auch $j \otimes \mathrm{id}_M$ nicht injektiv. Also ist M nicht flach. Dies zeigt insgesamt die Äquivalenz die behauptet wurde.

b) i) Sei S eine kurze Sequenz von A-Moduln. Dann gilt

$$S \otimes_A M \cong S \otimes_A (B \otimes_B M) \cong (S \otimes_A B) \otimes_B N.$$

Wenn also S exakt ist, ist auch $S \otimes_A B$ exakt, da B flach als A-Modul ist und da M ein flacher B-Modul ist, ist auch $(S \otimes_A B) \otimes_B N$ flach und mit oben somit auch $S \otimes_A M$, was zu zeigen war.

ii) Sei $j : N_1 \hookrightarrow N_2$ ein injektiver B-Modulhomomorphismus. Dann reicht es zu zeigen, dass $j \otimes \mathrm{id}_{M_B} : N_1 \otimes_B M_B \to N_2 \otimes_B M_B$ injektiv ist, um zu zeigen, dass M_B ein flacher B-Modul ist. Mit der Abbildung f, kann man alle Moduln als A-Moduln auffassen und wir bekommen die kanonischen A-Modulisomorphismen

$$N_i \otimes_B M_B = N_i \otimes_B (B \otimes_A M) \cong (N_i \otimes_B B) \otimes_A M \cong N_i \otimes_A M,$$

wobei die erste Gleichheit, das Einsetzen der Definition und die erste Isomorphie Aufgabe 1 ist. Die zweite Isomorphie ist eine Kombination aus Isomorphismen der Vorlesung. Da j auch injektiv als A-Modulhomomorphismus ist und M flach ist, ist $j \otimes \mathrm{id}_M : N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$ injektiv. Wenn wir auf beiden Seiten die kanonischen Isomorphismen von oben, 'davor bzw. dahinterschalten' erhalten wir die Abbildung $j \otimes \mathrm{id}_{M_B}$ die dann ebenfalls injektiv ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

a) Dies folgt sofort aus Aufgabe 1 a), da der Ring A selbst flach ist.
b) Da wir schon die passende Definition für projektiv angegeben haben, folgt dies ebenfalls sofort aus Teilaufgabe a) und Aufgabe 1 a).

Aufgabe 3 (6 Punkte).

a) Wir setzen $M = \mathbb{Z}$. Dann ist sowohl $\{1\}$ als auch $\{-2, 3\}$ eine minimale Basis aber die Kardinalität ist offensichtlich verschieden.
b) Wir setzen $\overline{M} := M/\mathfrak{m}M$ und $n := \dim_k(\overline{M})$. Wenn nun $\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n\}$ eine Basis von $\overline{M}$ ist über k, dann wählen wir ein Urbild $u_i \in M$ für jedes $\overline{u}_i$ und wir zeigen, dass $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine minimale Basis ist. Es gilt $M = \sum Au_i + \mathfrak{m}M$ und M ist endlich erzeugt, also auch $M/\sum Au_i$, also folgt mit Nakayamas Lemma $M = \sum Au_i$. Falls nun $\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n\}$ nicht minimal wäre und man Elemente entfernen könnte, also beispielsweise, wenn $\{u_2, \ldots, u_n\}$ schon M erzeugt, müsste auch $\{\overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}$ $\overline{M}$ erzeugen, was ein Widerspruch ist.

   Als nächstes zeigen wir, dass jede Minimalbasis von M die wie oben erzeugt wird, n Elemente hat. Falls $\{u_1, \ldots, u_m\}$ eine Minimalbasis von M ist setzen wir $\overline{u}_i$ als das Bild von u_i in $\overline{M}$. Dann erzeugt $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m$ den Modul $\overline{M}$, und die Elemente sind linear unabhängig über k. Insgesamt, zeigt dies aber die Aussage.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

a) $\Rightarrow$: Wir wollen zeigen, dass wenn M' oder M'' nicht noethersch ist, dann ist auch M nicht noethersch: Ist $M'_1 \subsetneq M'_2 \subsetneq M'_3 \subsetneq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M', so ist $f(M'_1) \subsetneq f(M'_2) \subsetneq f(M'_3) \subsetneq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Dass die Kette in M auch *echt* aufsteigend ist, liegt an der Injektivität von f (gäbe es $M'_i \subsetneq M'_{i+1}$ mit $f(M'_i) = f(M'_{i+1})$, so gäbe es $x \in M'_i$ und $y \in M'_{i+1} \setminus M'_i$ mit $f(x) = f(y)$). Analog liefert eine echt aufsteigende Kette von Untermoduln in M'' mittels g^{-1} eine aufsteigende Kette von Untermoduln in M. Hier erhält man durch die Surjektivität von g, dass auch die Kette in M echt aufsteigend ist.

   $\Leftarrow$: Sei $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Dann erhalten wir mittels f^{-1} und g aufsteigende Ketten von Untermoduln in M'

und M''. Nach Voraussetzung sind diese noethersch, es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass die beiden Ketten in M' und M'' ab dieser Schranke stationär sind. Nehmen wir nun an, es gäbe ein $j \geq 1$ mit $M_N \subsetneq M_{N+j}$. O.B.d.A. können wir $j = 1$ annehmen. Dann gibt es ein $m \in M_{N+1} \setminus M_N$ und es gilt $g(m) \in g(M_N)$; insbesondere gibt es ein $n \in M_N$ mit $g(m) = g(n)$. Damit liegt aber $m - n \in \ker(g) = \mathrm{Im}(f)$ und wir finden ein $k \in M'$ mit $f(k) = m - n \in M_{N+1}$. Es liegt also $k \in f^{-1}(M_{N+1}) = f^{-1}(M_N)$. Es folgt $f(k) \in M_N$ und Umstellen der Gleichung $f(k) = m - n$ führt zur Aussage $m \in M_N$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Die ursprüngliche Kette von Untermoduln $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3$ wird also spätestens bei dem gewählten N stationär.

b) Folgt jetzt induktiv aus der exakten Sequenz $0 \to M_j \to \oplus_{i=1}^{j} M_j \to \oplus_{i=1}^{j-1} M_j \to 0$.