



Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
24. Mai 2019

Höhere Algebra

Übungsblatt 5

Alle Ringe auf diesem Übungsblatt sind kommutativ.

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Sie dürfen für die Lösung dieser Aufgabe folgende Aussage benutzen:

Seien A, B Ringe, M ein A -Modul, P ein B -Modul und N ein (A, B) -Bimodul (i.e., N ist gleichzeitig ein A -Modul und ein B -Modul und die zwei Strukturen sind verträglich: $a(xb) = (ax)b$ für alle $a \in A, b \in B$ und $x \in N$). Dann ist $M \otimes_A N$ ein B -Modul und $N \otimes_B P$ ein A -Modul und

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

- a) Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von A -Moduln und M ihre direkte Summe. Zeigen Sie, dass M genau dann flach ist, wenn jedes M_i flach ist.
- b) Sei $f : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:
 - i) Sei B ein flacher A -Modul definiert über f . Dann ist ein flacher B -Modul M auch flach über A .
 - ii) Wenn M ein flacher A -Modul ist, dann ist $M_B := B \otimes_A M$ ein flacher B -Modul.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

Sei A ein Ring. Wir bezeichnen einen A -Modul P als *projektiv* falls es einen freien A -Modul F sowie einen A -Modul K gibt, sodass $F \cong P \oplus K$ gilt.

- a) Zeigen Sie: Freie A -Moduln sind flach.
- b) Zeigen Sie: Projektive A -Moduln sind flach.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

Sei A ein Ring und M ein A -Modul. Wir bezeichnen ein Erzeugendensystem W von M als *minimales Erzeugendensystem von M* , wenn es keine echte Teilmenge von W gibt, welche M erzeugt.

- a) Zeigen Sie für $A = \mathbb{Z}$, dass minimale Erzeugendensysteme nicht immer gleiche Kardinalität haben.
- b) Sei A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $k = A/\mathfrak{m}$ und M ein endlich-erzeugter A -Modul. Zeigen Sie, dass alle minimalen Erzeugendensysteme die Kardinalität $\dim_k(M/\mathfrak{m}M)$ haben.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Sei A ein Ring und

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von A -Moduln. Zeigen Sie:

- a) M ist genau dann noethersch, wenn M' und M'' noethersch sind.
- b) Sind $M_1, \dots, M_n$ noethersche Moduln, so ist auch $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ noethersch.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Freitag, 31. Mai 2019** um **10:00 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Es gibt keinen Notenbonus für diese Veranstaltung. Die erreichten Punkte bei der Korrektur dienen lediglich zu Ihrer Information.