LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
3. Juli 2019

Höhere Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (8 Punkte).

a) $\mathbb{Q}$ ist natürlich kein freier $\mathbb{Z}$-Modul: Schließen wir zuerst aus, dass $\mathbb{Q}$ frei von Rang 1 ist. Wäre dies der Fall, gäbe es ein $0 \neq \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $\{r \cdot \frac{p}{q} \mid r \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q}$. Für eine Primzahl l mit $l \nmid q$ gäbe es dann ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $r\frac{p}{q} = \frac{1}{l}$. Umstellen liefert allerdings $l \mid q$, Widerspruch. $\mathbb{Q}$ ist also nicht frei von Rang 1.
Nehmen wir nun an, $\mathbb{Q}$ wäre frei vom Rang > 1 mit Basis $\{x_i\}_{i\in I}$. Für $x_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \{x_i\}_{i\in I}$ und $x_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \{x_i\}_{i\in I}$ gilt dann aber $(p_2q_1)x_1 + (-p_1q_2)x_2 = 0$ und $p_2q_1, p_1q_2 \neq 0$, was ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der x_i ist; insbesondere kann es keine solche Basis geben und $\mathbb{Q}$ ist nicht frei.

b) Das ist falsch: Sei $A = \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots]$ der Polynomring über $\mathbb{Z}$ in (abzählbar) unendlich vielen Variablen und $M = A$. Dann ist offensichtlich M von 1 erzeugt. Jedes Ideal in A entspricht einem Untermodul N von M. Nehmen wir z.B. das Ideal $N = (X_1, X_2, X_3, \ldots)$, so ist N ein A-Untermodul von M, aber nicht endlich erzeugt.

c) Nach Voraussetzung ist α injektiv und β surjektiv. Da M'' endlich erzeugt ist, können wir $m_1'', \ldots, m_n'' \in M$ finden, so dass die Bilder $\beta(m_i'')$ den Modul M'' erzeugen. Ist nun $m \in M$ beliebig, so ist $\beta(m) = \sum a_i\beta(m_i'') = \beta(\sum a_i m_i'')$ für gewisse $a_i \in A$. Umstellen der Gleichung liefert $m - \sum a_i m_i'' \in \ker(\beta)$. Aber da ja die Sequenz exakt ist, ist $\ker(\beta) = \mathrm{im}(\alpha) \cong M'$. Und da M' endlich erzeugt ist, finden wir $m_1', \ldots, m_k' \in M'$, die M' erzeugen; insbesondere erzeugen die $\alpha(m_i')$ dann $\mathrm{im}(\alpha) = \ker(\beta)$. Für obiges m gilt also $m = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i'' + \sum_{i=1}^{k} b_i\alpha(m_i')$. Damit ist M von (den endlich vielen) $m_1'', \ldots, m_n'', \alpha(m_1'), \ldots, \alpha(m_k')$ erzeugt.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Der Lösungsvorschlag dieser Aufgabe befindet sich in handschriftlicher Form am Ende des Dokuments. Fälschlicherweise steht auf dem ersten Blatt Aufgabe 1, es handelt sich aber um Aufgabe 2.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

a) Wir konstruieren zueinander inverse Homomorphismen $R/\mathfrak{a} \otimes_R M \leftrightarrows M/\mathfrak{a}M$. Dazu sehen wir ein, dass $R/\mathfrak{a} \times M \to M/\mathfrak{a}M$, $(\overline{a}, m) \mapsto \overline{am}$ eine wohldefinierte, bilineare Abbildung ist. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts erhalten wir also eine Abbildung $R/\mathfrak{a} \otimes_R M \to M/\mathfrak{a}M$, $\overline{a} \otimes m \mapsto \overline{am}$. Desweiteren rechnen wir nach, dass $M \to R/\mathfrak{a} \otimes_A M$, $m \mapsto \overline{1} \otimes m$ ein Homomorphismus ist, der über $M/\mathfrak{a}M$ faktorisiert (da dies im Kern liegt). Wir erhalten also eine Abbildung $M/\mathfrak{a}M \to R/\mathfrak{a} \otimes_R M$,

$\overline{m} \mapsto \overline{1} \otimes m$, die auch wohldefiniert ist. Jetzt ergibt Einsetzen, dass die beiden Abbildungen zueinander invers sind, was die Behauptung zeigt.

b) Sei $R = \mathbb{Z}$, $= m\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dann folgt mit Teilaufgabe a):

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \big/ (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\,.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte).

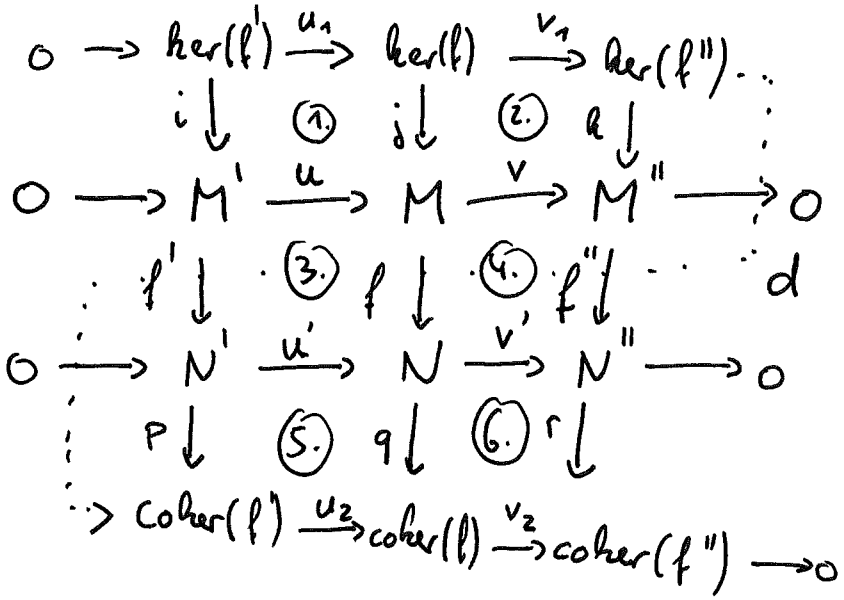
a) Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R und $k = R/\mathfrak{m}$. Es gilt dann:

$$0 = M \otimes_R N = M \otimes_R N \otimes_R k \cong (M \otimes_R k) \otimes_k (N \otimes_R k)$$

Es sind aber $M \otimes_R k$ und $N \otimes_R k$ beides k-Vektorräume; dies gilt dann auch für $(M \otimes_R k) \otimes_k (N \otimes_R k)$ als Tensorprodukt über dem Körper k, also als k-Modul. Es hat aber der so erhaltene Vektorraum die Dimension $\dim(M \otimes_R k) \cdot \dim(N \otimes_R k)$, folglich ist einer der beiden Faktoren 0, o.B.d.A. $M \otimes_R k$. Nach i) ist $M \otimes_R k \cong M/\mathfrak{m}M$. Wegen $\mathfrak{m} =$ Jacobsonradikal von A und $0 = M/\mathfrak{m}M$, also $\mathfrak{m}M = M$ folgt aus dem Lemma von Nakayama die Behauptung.

b) Falls R nicht lokal ist, kann Aufgabe 3 b) benutzen: Offenbar sind $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ endliche und damit endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln.
Wir haben gezeigt, dass $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = 0$ gilt, aber offensichtlich gilt auch $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$.

Blatt 4



Beh: Es exist. genau ein Hom $u_1 : \ker(f') \to \ker(f)$ s.d. die $u_2 : \operatorname{coker}(f') \to \operatorname{coker}(f)$ Diagramme ① & ③ kommutieren und i, j sind die kan. Inj. und p, q die kan Surj.

Beweis: Sei $x \in \ker(f')$, dann ist $f'(x) = 0$

$\Rightarrow f(u(x)) = u'(f'(x)) = 0$

$\Rightarrow u(x) \in \ker(f)$ also sind Existenz & Eind. von u_1 klar

$u'(f'(M')) = f(u(M)) \subseteq f(M)$, durch Quotientenbildung wird also aus u' ein eind. Hom $u_2 : \operatorname{coker}(f') \to \operatorname{coker}(f)$ s.d ③ kommutiert

□

Beh/Beweis: Der Beweis von der Beh. oben lässt sich komplett analog auf v, v', v_1, v_2 sowie ② und ⑥ übertragen (□)

Beh: Exaktheit bei $\ker(f)$

Beweis: Aus $v \circ u = 0 \Rightarrow v_1 \circ a_1 = 0$

$$\ker(v_1) = \ker(f) \cap \ker(v) = \ker(f) \cap \operatorname{im}(a) = \operatorname{im}(j) \cap \operatorname{im}(u) \quad (*)$$

Hilfsbeh.: $\operatorname{im}(j) \cap \operatorname{im}(u) = \operatorname{im}(j \circ a_1)$

mit Hilfsbeh und $(*)$ $\Rightarrow$ $\ker(v_1) = \operatorname{im}(j) \cap \operatorname{im}(u) = \operatorname{im}(j \circ a_1) = \operatorname{im}(a_1)$ $(\square)$

Beweis Hilfsbeh: „$\supseteq$" klar

„$\subseteq$" zeige: Sei $x \in \operatorname{im}(u) \cap \operatorname{im}(j)$

und $b \in \ker(f)$ s.d. $j(b) = x$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \ker(f') & \xrightarrow{i} & M' & \xrightarrow{f'} & N' \\ & & \downarrow a_1 & & \downarrow u & & \downarrow u' \\ 0 & \to & \ker(f) & \xrightarrow{j} & M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

$\Rightarrow \exists\, m' \in M'$ mit $u(m') = x$

da $f \circ j = 0$

$\Rightarrow 0 = f \circ j(b) = f(x) = f \circ u(m') = u' \circ f'(m')$

$\Rightarrow f'(m') = 0$ (da u' inj) $\Rightarrow \exists\, a \in \ker(f')$ mit $i(a) = m'$

(da $\ker(f') = \operatorname{im}(i)$) $\Rightarrow u(i(a)) = x$

$\Rightarrow j(a_1(a)) = x \Rightarrow$ Hilfsbeh $\square$

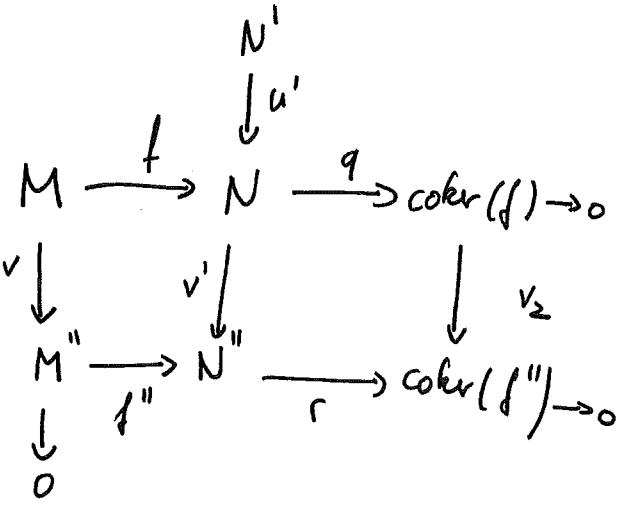
$\square$

Die Exaktheit bei $\ker(f')$ folgt, da die Inj von u auf a_1 vererbt wird

Die Exaktheit bei $\operatorname{coker}(f'')$ folgt, da die Surj von v' auf v_2 vererbt wird.

Beh: Exaktheit bei $\operatorname{coker}(f)$

Beweis: Aus $v' \circ u' = 0 \Rightarrow v_2 \circ u_2 = 0$



Hilfsbeh: $\ker(v') + \operatorname{im}(f) = \ker(v_2 \circ q)$

$$\Rightarrow \ker(v_2) = q(\ker(v_2 \circ q))$$

$$\overset{\text{Hilfsbeh}}{=} q(\ker(v') + \operatorname{im}(f))$$

$$= q(\ker(v')) + q(\operatorname{im}(f))$$

$$= q(\operatorname{im}(u')) \qquad (q(\operatorname{im}(f)) = 0, \text{ exakt})$$

$$= \operatorname{im}(q \circ u') = \operatorname{im}(u_2 \circ r) = \operatorname{im}(u_2) \qquad (\square)$$

Beweis Hilfsbeh:

Da $q \circ f = 0$ und $r \circ f'' = 0$,

$\ker(v') + \operatorname{im}(f) \subseteq \ker(v_2 \circ q)$ klar

Zeige: $\ker(v') + \operatorname{im}(f) \supseteq \ker(r \circ v')$

Sei $x \in \ker(r \circ v')$, dann $v'(x) \in \ker(r)$

und $\exists m'' \in M''$ s.d. $f''(m'') = v'(x)$, da $\operatorname{im}(f'') = \ker(r)$

Da v surj. $\exists m \in M$ mit $v(m) = m''$

$$\Rightarrow v'(x) = f''(v(m)) = v'(f(m))$$

$$\Rightarrow v'(x - f(m)) = 0$$

$$\Rightarrow x - f(m) \in \ker(v')$$

$\square$

$\square$

Zeige: Es gibt genau einen Homomorphismus $d: \ker(f'') \longrightarrow \operatorname{coker}(f')$ mit der Eigenschaft: wenn $x \in \ker(f'')$, $m \in M$, $n' \in N'$ gilt

$$v(m) = k(x) \quad u'(n') = f(m)$$

dann gilt: $d(x) = p(n')$

Beweis: Sei $x \in \ker(f'') \Rightarrow \exists\, m \in M$ s.d. $v(m) = k(x)$ da v surjektiv ist

Darüberhinaus $v'(f(m)) = f''(k(x)) = 0$

$\Rightarrow \exists!\, n' \in N'$ s.d. $u'(n') = f(m)$ da u' injektiv ist

Beh: $p(n') \in \operatorname{coker}(f')$ ist unabh. von $m \in M$ s.d $v(m) = k(x)$

Beweis: Sei $m_1 \in M$ mit $v(m_1) = k(x) \Rightarrow m_1 = m + u(m')$ mit $m' \in M'$

Sei $n_1' \in N'$ s.d $u'(n_1') = f(m_1) \Rightarrow n_1' = n' + f'(m')$

$$u'(n' + f'(m')) = u'(n') + u'(f'(m')) = f(m) + f(u(m'))$$
$$= f(m + u(m'))$$
$$= f(m_1)$$

$$\Rightarrow p(n_1') = p(n' + f'(m')) = p(n') + p(f'(m')) = p(n')$$

$$\Rightarrow d: \ker(f'') \longrightarrow \operatorname{coker}(f')$$
$$x \longmapsto p(n')$$

so Abbildung ist wohldef.

Seien nun $x_1, x_2 \in \ker(f'')$ und $x = x_1 + x_2$

Wir nehmen Elemente $m_1, m_2 \in M$ s.d $v(m_1) = k(x_1) \wedge v(m_2) = k(x_2)$

und $m = m_1 + m_2$

$\Rightarrow d(x) = d(x_1) + d(x_2)$ i.e. Homomorphismus

Zeige: Sequenz ist exakt bei $\ker(f'')$

Beweis: Wir nehmen, dass $x = v_1(x_1)$ für ein $x_1 \in \ker(f)$

~~dann nehmen wir ein~~ $j(x_1) =: m$

Da $f(j(x_1)) = 0 \Rightarrow d(x) = 0 \Rightarrow d \circ v_1 = 0$

Andererseits, nehmen wir an, dass $d(x) = 0$

Mit der Notation oben, haben wir $u' = f'(m'')$ mit $m'' \in M'$

Dann gilt $f(m) = u'(u') = u'(f'(m'')) = f(u(m''))$

$\Rightarrow f(m - u(m'')) = 0$

$\Rightarrow$

$m - u(m'')$ ist von der Form $j(x')$ mit $x' \in \ker(f)$

$k(x) = v(m) = v(u(m'') + j(x')) = v(j(x')) = k(v_1(x'))$

$\Rightarrow x = v_1(x')$ da k injektiv $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Beh

□

Zeige: Sequenz ist exakt bei $\operatorname{coker}(f')$

Beweis: (Mit der Notation von oben)

$u_2(d(x)) = u_2(p(u')) = q(u'(u')) = q(f(m)) = 0$

$\Rightarrow u_2 \circ d = 0$

Andererseits, nehmen wir an $w = p(u') \in \operatorname{coker}(f')$ s.d $u_2(w) = u_2(p(u')) = 0$

$\Rightarrow q(u'(u')) = 0$ und somit $u'(u') = f(m)$ für ein $m \in M$; mit $u' \in N'$

da $v'(u'(u')) = 0 \Rightarrow v'(f(m)) = 0 \Rightarrow f''(v(m)) = 0$

i.e. $v(m) = k(x)$ für ein $x \in \ker(f'')$

und per Def. $w = d(x) \Rightarrow$ Beh □