LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
16. Mai 2019

Höhere Algebra
Übungsblatt 4

Alle Ringe auf diesem Übungsblatt sind kommutativ.

Aufgabe 1 (8 Punkte).

a) Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathbb{Q}$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul.

b) Sei A ein Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul.
Zeigen oder widerlegen Sie: Jeder A-Untermodul $N \subseteq M$ ist endlich erzeugt.

c) Sei A ein Ring und

$$0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln.
Zeigen Sie: Sind M' und M'' endlich erzeugt, so auch M.

Aufgabe 2 (6 Punkte- Schlangenlemma).
Zeigen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:
Ein kommutatives Diagram von R-Moduln und R-Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \to & N' & \xrightarrow{u'} & N & \xrightarrow{v'} & N'' & \to & 0 \end{array}$$

induziert eine exakte Sequenz

$$0 \to \ker(f') \to \ker(f) \to \ker(f'') \xrightarrow{d} \operatorname{coker}(f') \to \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(f'') \to 0.$$

Hinweis: Es ist sowohl die Wohldefiniertheit der Abbildungen als auch die Exaktheit der Sequenz an jeder Stelle zu überprüfen. Die Abbildung d wurde bereits in der Vorlesung angegeben.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

a) Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ und einen R-Modul M sind $(R/\mathfrak{a}) \otimes_R M$ und $M/\mathfrak{a}M$ isomorph.
Hinweis: Versuchen Sie zuerst zu zeigen, dass $R/\mathfrak{a} \times M \to M/\mathfrak{a}M$, $(a + \mathfrak{a}, m) \mapsto am + \mathfrak{a}M$ eine wohldefinierte, bilineare Abbildung ist.

b) Für $m, n \in \mathbb{N}$ und $d := \operatorname{ggT}(m, n)$ gilt

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

a) Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und sind M und N endlich erzeugte R-Moduln, so folgt aus $M \otimes_R N = 0$ bereits $M = 0$ oder $N = 0$.
Hinweis: Betrachten Sie für den Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$ den Modul $M \otimes_R k$ und verwenden Sie das Lemma von Nakayama.

b) Finden Sie zudem ein Gegenbeispiel für die Aussage in a), falls R nicht lokal ist.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Freitag, 24. Mai 2019** um **10:00 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Es gibt keinen Notenbonus für diese Veranstaltung. Die erreichten Punkte bei der Korrektur dienen lediglich zu Ihrer Information.