LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
20. Mai 2019

Höhere Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (3 Punkte).
Man beachte zunächst, dass man $\mathbb{Z}_{(\mathrm{p})}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ auffassen kann.
Es gilt: $\mathbb{Z}_{(\mathrm{p})} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$. Hieraus folgt sofort: ${\mathbb{Z}_{(\mathrm{p})}}^{\times} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid ab\}$.
Die Ideale von $\mathbb{Z}_{(\mathrm{p})}$ sind genau die Bilder der Ideale $I = (m)$ von $\mathbb{Z}$ unter der Abbildung $I \mapsto I\,\mathbb{Z}_{(\mathrm{p})}$ (siehe Satz 2.1.4). Sei $m = p^\alpha n, p \nmid n$. Dann ist n eine Einheit in $\mathbb{Z}_{(\mathrm{p})}$ und es folgt: $(m)\,\mathbb{Z}_{(\mathrm{p})} = p^\alpha\,\mathbb{Z}_{(\mathrm{p})}$. Folglich sind durch $(0), p^\alpha\,\mathbb{Z}_{(\mathrm{p})}, \alpha \in \mathbb{N}_0$ die sämtlichen Ideale von $\mathbb{Z}_{(\mathrm{p})}$ gegeben.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

a) Wegen $3\sqrt{-5} = -3 + 3(1+\sqrt{-5}) \in P$ und $\sqrt{-5}(1+\sqrt{-5}) = -6 + (1+\sqrt{-5}) \in P$ ist P ein Ideal in R. Aus $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathbb{Z}[1+\sqrt{-5}]$ ersieht man $R/P \simeq \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z}$. Da R/P also ein Körper ist, ist P maximal, insbesondere also prim.
b) Angenommen $P = \alpha R$ mit $\alpha \in R$. Dann gibt es Elemente $\beta, \gamma \in R$, so dass gilt $3 = \alpha\beta, 1+\sqrt{-5} = \alpha\gamma$. Sei $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto z\bar{z}$, die komplexe Normabbildung. Beachte dabei $N(R) \subseteq \mathbb{Z}$. Damit folgt $9 = N(\alpha)N(\beta)$ und $6 = N(\alpha)N(\gamma)$. Damit ist $N(\alpha) = \pm 1$ oder ± 3. Aus $N(\alpha) = \pm 1$ folgt $\alpha \in R^\times$ (Widerspruch!); die Gleichung $N(\alpha) = \pm 3$ ist nicht lösbar mit $\alpha \in R$.
c) Wir zeigen: $P_P = 3R_P$. Wegen $P_P = \{\frac{a}{b} \mid a \in P, b \notin P\}$ und $3 \in P$ ist die Inklusion '$\supseteq$' offensichtlich.
Umgekehrt genügt es zu zeigen: $3, 1+\sqrt{-5} \in 3R_P$. Klar ist $3 \in 3R_P$. Außerdem gilt $1+\sqrt{-5} = \frac{6}{1-\sqrt{-5}} = 3 \cdot \frac{2}{1-\sqrt{-5}}$. Es bleibt also noch zu zeigen: $\frac{2}{1-\sqrt{-5}} \in R_P^\times$. Dies folgt aus $2, 1-\sqrt{-5} \notin P$.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Es gilt:

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{m}} &= \{\frac{r}{u} \mid r \in R, u \notin \mathfrak{m}\}, \\ \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}} &= \{\frac{s}{v} \mid s \in \mathfrak{m}, v \notin \mathfrak{m}\}. \end{aligned}$$

Betrachte die kanonische Abbildung

$$\varphi : R \longrightarrow R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}, \quad r \mapsto \frac{r}{1} + \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}.$$

Es gilt: $r \in \ker(\varphi) \iff \frac{r}{1} \in \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}} \iff \frac{r}{1} = \frac{s}{v}$ für ein $s \in \mathfrak{m}, v \notin \mathfrak{m} \iff$
$\exists u \notin \mathfrak{m} : vur = us \implies vur \in \mathfrak{m} \implies r \in \mathfrak{m}$ (da $\mathfrak{m}$ maximal, also insbesondere prim ist und $uv \notin \mathfrak{m}$).

Damit induziert φ eine injektive Abbildung

$$\bar{\varphi} : R/\mathfrak{m} \longrightarrow R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}.$$

Zur Surjektivität: Sei $\frac{r}{u} + \mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ gegeben. Wegen $uR + \mathfrak{m} = R$ gibt es ein $s \in R$ mit $us \equiv r(\mod \mathfrak{m})$ und es folgt: $\varphi(s) = \frac{s}{1} + \mathfrak{m}R_\mathfrak{m} = \frac{r}{u} + \mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$. Die Aussage gilt nicht für Primideale. Betrachte den Ring $\mathbb{Z}$ und das Primideal (0) in $\mathbb{Z}$. Dann gilt $\mathbb{Z}/(0) \cong \mathbb{Z}$ aber $\mathbb{Z}_{(0)} = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
a) $\Rightarrow$ b): Die Implikation $\Rightarrow$ ist trivial. Sei umgekehrt $m \in M$ beliebig. Wegen $R = (f_1, \ldots, f_m)$ gibt es eine Darstellung $1 = \sum_{i=1}^m a_i f_i$ mit $a_i \in R$. Da $m = 0$ in $M[f_i^{-1}]$ ist, gibt es $k_i \in \mathbb{N}$ mit $f_i^{k_i} m = 0$ in R. Sei $K := \sum_{i=1}^m k_i$. Dann folgt: $m = 1 \cdot m = (\sum_{i=1}^m a_i f_i)^K \cdot m = 0$ in R.
b) $\Rightarrow$ a): Betrachte den R-Modul $M = R/(f_1, \ldots, f_m)$. Es gilt: $M[f_i^{-1}] = 0$ für $i = 1, \ldots, m$. Wegen (b) ist also $M = 0$, beziehungsweise $R = (f_1, \ldots, f_m)$.