



Höhere Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (6 Punkte).

a) Wir zeigen: $\sqrt{f} = (f_1 \cdots f_r)$.

Sei dazu $g = f_1 \cdots f_r \cdot h \in (f_1 \cdots f_r)$. Sei $a := \max\{a_1, \dots, a_r\}$. Dann gilt $g^a \in I$, also $g \in \sqrt{I}$.

Sei umgekehrt $g \in \sqrt{I}$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $g^m \in I$, d.h. f teilt g^m . Da der Polynomring faktoriell ist, impliziert dies $f_1 \cdots f_r$ teilt g , also $g \in (f_1 \cdots f_r)$.

b) Es genügt zu zeigen: $\text{ggT}(f, \frac{df}{dx_1}, \dots, \frac{df}{dx_n}) = f_1^{a_1-1} \cdots f_r^{a_r-1}$.

Wir setzen $g_k := f_1^{a_1} \cdots f_r^{a_r} / f_k^{a_k}$. Dann gilt für alle $k = 1, \dots, r$

$$\frac{df}{dx_i} = a_1 f_1^{a_1-1} \frac{df_1}{dx_i} g_k + f_k^{a_k} \frac{dg_k}{dx_i}. \quad (*)$$

Dies impliziert $f_k^{a_k-1} \mid \frac{df}{dx_i}$ für alle $i = 1, \dots, r$. Es ist also noch zu zeigen, dass es ein i gibt, so dass $f_k^{a_k}$ nicht die rechte Seite in $(*)$ teilt. Sei dazu $i \in \{1, \dots, r\}$ so gewählt, dass $f_k = \sum_{j=0}^N h_j(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_r) x_i^j$ mit $h_N \neq 0$. ($\hat{}$ bedeutet Weglassen der entsprechenden Unbekannten.) Die rechte Seite von $(*)$ ist genau dann durch $f_k^{a_k}$ teilbar, wenn $f_k \mid \frac{df_k}{dx_i}$. Wegen $\frac{df_k}{dx_i} = \sum_{j=1}^N j h_j(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_r) x_i^{j-1}$ ist dies aus Gradgründen nicht möglich.

Aufgabe 2 (5 Punkte).

a) Wir betrachten f und g als Elemente von $(k[X])[Y]$. Da $k[X]$ ein faktorieller Ring ist, folgt mit dem Lemma von Gauß, dass dann f und g auch als Elemente von $k(X)[Y]$ keinen gemeinsamen Faktor haben. Es existiert jedoch ein ggT, da auch $k(X)[Y]$ faktoriell ist. Damit gilt (bis auf Assoziiertheit) $\text{ggT}(f, g) = 1$. Wir finden also mit dem Lemma von Bézout Elemente $\hat{a}, \hat{b} \in k(X)[Y]$ mit $\hat{a}f + \hat{b}g = 1$. Durch geschicktes Multiplizieren (wir denken an den „Hauptnenner“) finden wir ein $0 \neq d \in k[X]$ derart, dass $a = \hat{a}d$ und $b = \hat{b}d$ in $k[X][Y]$ liegen. Es folgt nun $af + bg = d$. Ist nun $(P_X, P_Y) \in V$, so gilt insbesondere $d(P_X) = 0$. Aber d ist ein Polynom in einer Variablen und hat damit nur endliche viele Nullstellen. Das bedeutet, dass wir nur endlich viele Möglichkeiten für P_X haben. Vollkommen analog folgern wir, dass es nur endlich viele Möglichkeiten für P_Y gibt. Zusammen genommen haben wir somit die Endlichkeit von V gezeigt.

b) Zu zeigen ist $I(Z(f)) = (f)$. Dabei gilt „ $\supseteq$ “ immer. Ist nun $g \in I(Z(f))$, so folgt $Z(f) \subseteq Z(g)$; insbesondere ist $Z(f, g) = Z(f) \cap Z(g)$ unendlich. Nach Teil a) müssen

also f und g einen gemeinsamen Faktor haben, der aufgrund der Irreduzibilität von f nur f selbst sein kann. Damit ist $g \in (f)$ und die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Ist $I(V)$ kein Primideal, so gibt es $f_1 f_2 \in I(V)$ mit $f_i \notin I(V)$. Es gilt $V \subseteq Z(f_1 f_2) = Z(f_1) \cup Z(f_2)$ und damit $V = (V \cap Z(f_1)) \cup (V \cap Z(f_2))$ sowie $V \cap Z(f_i) \subsetneq V$; also ist V reduzibel.

Sei umgekehrt V reduzibel, d.h. es gibt $V_i \subsetneq V$ mit $V = V_1 \cup V_2$, so ist $I(V_i) \supsetneq I(V)$. Wähle also $f_i \in I(V_i) \setminus I(V)$. Nun gilt jedoch $f_1 f_2 \in I(V)$, d.h. $I(V)$ ist kein Primideal.