Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
2. Mai 2019

Höhere Algebra
Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Sei k ein Körper, $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ und $I = (f)$. Sei $f = f_1^{a_1} \cdots f_r^{a_r}$ die Faktorisierung von f in ein Produkt von verschiedenen irreduziblen Faktoren.

a) Berechnen Sie $\sqrt{I}$.

b) Es gelte zusätzlich $\mathrm{char}(k) = 0$. Zeigen Sie: $\sqrt{I} = (f_{red})$ mit

$$f_{red} = \frac{f}{\mathrm{ggT}(f, \frac{df}{dx_1}, \ldots, \frac{df}{dx_n})}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte).
Sei k ein Körper. Zeigen Sie:

a) Sind $f, g \in k[X, Y]$ Polynome die keinen gemeinsamen (nicht-trivialen) Faktor haben, so ist $V = Z(f, g) = Z(f) \cap Z(g)$ eine endliche Menge.
Tipp: Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(f, g)$ eine Einheit in $k(X)[Y]$ ist und folgern Sie mit dem Lemma von Bézout, dass es $d \in k[X]$ und $a, b \in k[X, Y]$ mit $af + bg = d$ gibt.
Folgern Sie, dass die Anzahl der P_X mit $(P_X, P_Y) \in V$ endlich ist.

b) Ist $f \in k[X, Y]$ irreduzibel und $Z(f)$ unendlich, so ist $I(Z(f)) = (f)$.
Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, folgt die Aussage aus Hilberts Nullstellensatz. Wir zeigen, dass hier bereits schwächere Voraussetzungen genügen.

Definition 1 *Sei $k[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring über einem Körper k. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{A}_k^n$ ist eine **affine** k**-Varietät**, falls T die gemeinsame Nullstellenmenge einer Menge von Polynomen $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ist.*
*Ist $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ eine affine k-Varietät, so ist eine k**-Untervarietät** $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die selbst eine affine k-Varietät ist.*
*Betrachten wir nun die Zariskitopologie auf $\mathbb{A}_k^n$. Eine affine k-Varietät $X \subset \mathbb{A}_k^n$, aufgefasst als topologischer Raum bzgl. der Zariskitopologie ist **irreduzibel**, falls aus $X = X_1 \cup X_2$ mit k-Untervarietäten $X_1, X_2 \subseteq X$ stets $X_1 = X$ oder $X_2 = X$ folgt.*

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Sei $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ eine affine k-Varietät. Dann ist V irreduzibel genau dann, wenn $I(V) \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Primideal ist.

Ihre Lösungen sind spätestens am **Freitag, 10. Mai 2019** um **10:00 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Es gibt keinen Notenbonus für diese Veranstaltung. Die erreichten Punkte bei der Korrektur dienen lediglich zu Ihrer Information.