LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019
20. Mai 2019

Höhere Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte).

a) Wir zeigen die Aussage a) gleich etwas allgemeiner. Sei S eine beliebige Indexmenge. Wir zeigen:
$$Z(\sum_{s\in S} I_s) = \bigcap_{s\in S} Z(I_s).$$
Wegen $I_s \subseteq \sum I_s$ folgt $Z(I_s) \supseteq Z(\sum I_s)$ für alle $s \in S$. Sei umgekehrt $a \in Z(I_s)$ für alle $s \in S$. Sei $f \in \sum I_s$. Dann ist f von der Form $f = \sum_{endlich} f_i$ mit $f_i \in I_{s_i}$. Daher gilt: $f(a) = \sum_{endlich} f_i(a) = 0$.

b) Da für zwei Ideal $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in R gilt $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, bekommen wir $Z(\mathfrak{ab}) \supseteq Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b})$.
Sei umgekehrt $a \in Z(\mathfrak{ab})$ und $a \notin Z(\mathfrak{a})$. Dann gibt es ein $f \in \mathfrak{a}$ mit $f(a) \neq 0$. Sei $g \in \mathfrak{b}$, dann folgt $fg \in \mathfrak{ab}$, damit dann $(fg)(a) = 0 = f(a)g(a)$, also insgesamt $g(a) = 0$ und somit $a \in Z(\mathfrak{b})$.

Aufgabe 2 (2 Punkte).
Aus $y = x^2$ und $x^2 = 4 - y$ folgt $y = 4 - y$, also $y = 2$. Damit ergibt sich sofort $x = \pm\sqrt{2}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Sei $R = k[x_1, \ldots, x_n]$. Wir bezeichnen die Teilmengen in $\mathcal{T}$ als offene Mengen.

a) Wegen $Z(R) = \emptyset$ und $Z((0)) = k^n$ sind $\emptyset$ und k^n offen. Wegen $Z(IJ) = Z(I) \cup Z(J)$ (aus Aufgabe 1 b)) ist der endliche Schnitt von offenen Mengen wieder offen.
Aufgabe 1 a) zeigt nun, dass eine beliebige Vereinigung von offenen Mengen wieder offen ist.

b) Da jedes Ideal $I \neq (0), k[x]$ von einem Polynom f erzeugt wird, sind die Zariski-offenen Mengen von k genau die Mengen der Form $k \setminus M$ mit $M \subseteq k$, $|M| < \infty$. Insbesondere ist k nicht haussdorffsch bezüglich der Zariski-Topologie.