LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley

Martin Hofer

Sommersemester 2019

12. Juli 2019

Höhere Algebra
Übungsblatt 12

Dies ist das letzte Übungsblatt des Semesters. Für die letzte Aufgabe ist es eventuell hilfreich noch die Vorlesung am Montag, den 14. Juli abzuwarten.

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Sei G eine abelsche topologische Gruppe und $S := \bigcap_U U$, wobei sich der Schnitt über alle offenen Umgebungen der 0 erstreckt. Zeigen Sie:

a) S ist eine Untergruppe von G.

b) S ist der Abschluss von $\{0\}$ in G, das heißt

$$S = \bigcap_Z Z,$$

wobei Z die abgeschlossenen Teilmengen von G, die 0 enthalten, durchläuft.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei und p eine ungerade Primzahl. Zeigen Sie, dass im Fall $d \equiv 2, 3 \bmod 4$:

$$p\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \text{ mit } \mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2 & \text{falls } d \equiv x^2 \bmod p \text{ für ein } x \in \mathbb{Z}, p \nmid d, \\ \mathfrak{p}_1 & \text{falls } d \not\equiv x^2 \bmod p \text{ für alle } x \in \mathbb{Z}, \\ \mathfrak{p}_1^2 & \text{falls } p \mid d, \end{cases}$$

wobei $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ Primideale in $\mathcal{O}_K$ über p sind. Was passiert im Fall $d \equiv 1 \bmod 4$?
Hinweis: Falls $p \nmid d$ und $d \equiv x^2 \bmod p$, so ist $\left\langle p, x \pm \sqrt{d} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$ ein Primideal in $\mathcal{O}_K$. Falls $d \not\equiv x^2 \bmod p$ für alle $x \in \mathbb{Z}$, so ist $p\mathcal{O}_K$ prim.

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Sei $(A_n, \varphi_{n',n})$ ein inverses System von abelschen Gruppen. Man sagt $(A_n, \varphi_{n',n})$ erfüllt die *Mittag-Leffler-Bedingung* falls die absteigende Folge $\varphi_{n',n}(A'_n) \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stationär wird. Das heißt für alle n gibt es ein $n_0 \geq n$ so dass für alle $n', n'' \geq n_0$ gilt:

$$\varphi_{n',n}(A_{n'}) = \varphi_{n'',n}(A_{n''}).$$

Sei

$$0 \to (A_n) \to (B_n) \to (C_n) \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von inversen Systemen. Zeigen Sie:

a) Falls (B_n) die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt, so auch (C_n).

b) Falls (A_n) die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt so ist folgende Sequenz exakt:

$$0 \to \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n B_n \to \varprojlim_n C_n \to 0.$$

Ihre Lösungen sind spätestens am **Freitag, 19. Juli 2019** um **10:15 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen.