



Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Sommersemester 2019

July 18, 2019

Höhere Algebra – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (6 Punkte).

- a) i) $\Rightarrow$ ii): Wir nehmen an $a \not\subseteq b$, also gibt es ein $a \in a \setminus b$ und $a \neq 0$. Wenn $b = 0$, dann gilt $b \subseteq a$, sonst gibt es ein $b \neq 0 \in b$. Dann gilt $a/b \neq 0$, also ist entweder $a/b \in A$ oder $b/a \in A$. Falls der erste Fall eintreten würde, würde gelten $a = (a/b)b \in Ab = b$, was ein Widerspruch zur Annahme wäre, also gilt $b/a \in A$. Also $b = (b/a)a \in Aa$. Da $b \in b \setminus \{0\}$ beliebig war gilt also $b \subseteq a$.
- ii) $\Rightarrow$ i): Sei $a/b \in K^\times$ für $a, b \in A$ und $b \neq 0$. Dann gilt $a \in (a) \subseteq (b)$ oder $b \in (b) \subseteq (a)$ in A . Im ersten Fall, können wir $a = xb$ mit $x \in A$ schreiben; dann gilt $a/b = xb/b = x \in A$. Im zweiten Fall, können wir $b = ya$ mit $y \in A$ schreiben; dann gilt $a/b = a/ya = 1/y$, also ist $(a/b)^{-1} = y \in A$.
- b) Da die $\subseteq$ -Relation auf Idealen in A_p und $A/\mathfrak{p}$ von A vererbt wird, und beide Ringe Integritätsbereiche bleiben, kann man mit Teilaufgabe a) folgern, dass A_p und $A/\mathfrak{p}$ Bewertungsringe sind.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

Wir haben bereits im Tutorium bzw. in der Vorlesung gezeigt (Lemma 8.2.4 der Vorlesung), dass ein diskreter Bewertungsring (DVR) ein noetherscher Bewertungsring ist (und kein Körper). Also haben wir eine Richtung gezeigt.

Sei A nun ein noetherscher Bewertungsring. Satz 7.5.2 sagt uns, dass A dann lokal ist. Wir wollen nun Satz 8.2.5 verwenden und müssen dazu zeigen, dass A Dimension 1 hat. Dann wollen wir folgende Äquivalenz dieses Satzes für einen lokalen noetherschen Integritätsbereich A von Dimension 1 benutzen: A ist ein DVR genau dann, wenn $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal ist.

Dazu zeigen wir zuerst, dass A ein Hauptidealring ist. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A . Dieses Ideal ist endlich erzeugt da A noethersch ist, d.h. $\mathfrak{a} = (x_1, \dots, x_k)$ für $x_i \in A$. Mit einem Ergebnis eines Blattes sind die Ideale (x_i) total geordnet und damit enthält ein Ideal alle anderen und somit ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal und A damit ein Hauptidealring.

Nun müssen wir noch zeigen, dass A Dimension 1 hat um überhaupt Satz 8.2.5 verwenden zu können. Da A ein Hauptidealring ist gibt es ein $m \in A$ mit $\mathfrak{m} = (m)$. Für jedes Primideal (p) gilt $(p) \subseteq (m)$, also gibt es ein $a \in A$, so dass $am = p$ und da (p) prim ist, gilt zudem $m \in (p)$ oder $a \in (p)$. Falls der erste Fall eintritt, folgt sofort $(p) = \mathfrak{m}$. Falls der zweite Fall eintritt gibt es ein $b \in A$ so dass $p = am = bpm$ oder umgestellt $(1 - bm)p = 0$. Da m keine Einheit ist, folgt $(1 - bm) \neq 0$ und da A ein Integritätsbereich ist, $p = 0$. Also ist die einzige mögliche Kette von Primidealen in A : $0 \subsetneq \mathfrak{m}$, was bedeutet $\dim(A) = 1$. Wir können also Satz 8.2.5 anwenden und haben somit auch die andere Richtung gezeigt.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

- a) Wir sehen sofort ein, dass $\mathfrak{P}_i := (y_i)$ ein Primideal von $k[y_i]$ ist. Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\mathfrak{P}_{i+1} \cap k[y_i] = \mathfrak{P}_i$ (ist leider am Übungsblatt anders gestanden) gilt. Die Inklusion $\supset$ ist trivial, die andere Inklusion folgt aus einem Koeffizientenvergleich. Nun sei $R_i := k[y_i]_{\mathfrak{P}_i}$ d.h. die Lokalisierung von $k[y_i]$ beim Primideal $\mathfrak{P}_i$. Zu zeigen ist nun: $R_i \subseteq R_{i+1}$: Da mit $\mathfrak{P}_{i+1} \cap k[y_i] = \mathfrak{P}_i$ aber $k[y_i] \setminus \mathfrak{P}_i \subseteq k[y_{i+1}] \setminus \mathfrak{P}_{i+1}$ und somit auch $R_i := (k[y_i] \setminus \mathfrak{P}_i)^{-1} k[y_i] \subseteq R_{i+1} := (k[y_{i+1}] \setminus \mathfrak{P}_{i+1})^{-1} k[y_{i+1}]$. Da also $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots$ gilt, erhält man auch Ringstruktur auf R : Für zwei Elemente $x, y \in R$ gibt es immer ein i_0 , so dass $x, y \in R_{i_0}$ und dieses R_{i_0} ist ein Ring also insbesondere abgeschlossen. Jedes $k[y_i]$ ist ein Integritätsbereich und da R_i eine Lokalisierung von $k[y_i]$ an einem Primideal ist, ist jedes R_i ebenfalls ein Integritätsbereich. Ebenso vererbt sich in unserem Fall die Eigenschaft ein UFD (faktorieller Ring) zu sein.
- b) Da R ein Integritätsbereich ist können wir den Quotientenkörper $\text{Quot}(R) := (R \setminus \{0\})^{-1} R$ definieren. Sei nun $f/g \in \text{Quot}(R)$ i.e. $f \in R$ und $g \neq 0 \in R$. Falls $f/g \in R$ sind wir fertig. Andernfalls folgt, weil R ein UFD ist, dass $(f/g)^{-1} \in R$ gelten muss. Somit haben wir gezeigt, dass R ein Bewertungsring ist.
- c) Der Ring R ist per Konstruktion kein noetherscher Ring: Betrachte einfach $(y_0, y_1, \dots)$.